39. 5.A.5

Digitized by Google

XXXVI.E.11.

Digitized by Google

MATHESEOS
AD MIXTAM
RECENTIORUM
PHILOSOPHIAM NECESSARIÆ
ELEMENTA

IN METHODO NATURALI
NUNC PRIMUM
DEMONSTRATA

TOMUS. I.

BIBLIOTECA NAZ. VITTORIO EMANUELE ROMA

GENUÆ.

IN TYPOGRAPHIA GEXINIANA,
OLIM LERZIANA

MDCCLIII.

SUPERIORUM PERMISSU.

Digitized by Google

Digitized by Google

AD LECTOREM EDITOR.

QUæ ad horum elementorum Matheſeos editionem me excitaverint, ſi nitide hic tibi aperiam, cum levia præſertim omnino non ſint, injucundum tibi fore, Lector Benevole, minime ſuſpicor. Compertum eſt Phyſicam ſelectiorem jis eſſe inacceſſam, qui in Arithmeticà, & Algebra, in elementari, & ſublimiori Geometriâ, in utrâque Trigonometriâ dudum, & ſeriò non ſint exercitati; eamq; ob rem harum Diſciplinarum ſtudium cum Philoſophiæ ſtudio in Recentiorum ſcholis arctiſſimè coniungi. Itaque cum in tanta Mathematicorum frequentia neminem reperiam qui partes haſce ſimul, & ſeorſim omnes ediderit, inde neceſſariò factum iri puto, ut diverſæ partes diversâ methodo a diverſis pertractatæ explice-

plice-

Digitized by Google

plicentur; ex quo quæ, & quanta conſequantur incommoda, dici vix poteſt. Si diverſas corporis alicujus partes peritiſſimi, & cum cum Apelle ipſo comparandi in pingendo Uiri deſcribant, quin tamen earum nexum, ordinemque ſibi ob oculos ponant; certe ubi ad eas coaptandas convenient, informe monſtrum ex hujuſmodi coniunctione exurgere mirabuntur. Quodſi ergo cuidam veluti tabulæ mens humana comparatur, in qua facultatum noſtrarum uſu, atque exercitio, Inſtitutorum præceptis, ſcriptiſque Authorum ſcientiæ quodammodo depinguntur, haud vereor confidenter aſſerere Matheſin in tua mente impreſſum iri minime cohærentem, nullo modo ſibi in partium relatione, atque ordine reſpondentem, ubi partem unam apud Euclidem legas, aliam excipias ab Apollonio, in hac Theodoſium conſulas, in illa Archimedem. Idcircò elementa hæc Recentiorum præſertim ſcholis accommodata eſſe exiſtimavi. Ex iis partibus, quæ tum in illa, tum

in aliis

Digitized by Google

in aliis cum ea affinibus facultatibus neceſſariæ prædicari ſolent, ſimplex, & unum ſibi ubique ſimile ſyſtema conflare conatus eſt eorum Auctor, expurgatum ab iis omnibus, quæ extranea, & auditorum jucunditati ſervire melius, quam uſui Matheſeos in Philoſophiâ videbantur; naturalem *ordinem in iis ſectatus eſt conſtantiſſime, quin tamen rigor ille demonſtrandi, qui totus Mathematicæ proprius eſt, minimum acceperit detrimentum, quod quidem quam difficile, & aſperum factu ſit, ii ſolum agnovêre, qui labori hujuſmodi manus admoverunt; qua ex methodo perſpicuitatis ubique memor, atque ſollicitus, tantam brevitatem conſequutus eſt, ut intra biennium abſolvi cum ipſa* Philoſophia *poſſe commodiſſime facto ipſo comprobaverit; ut omnia paucis complectar, eorum uſum, atque neceſſitatem in philoſophia in jis elucubrandis unicè reſpexit.* Inde *factum eſt, ut ea multi non* Philoſophiæ *modo, ſed aljis etiam diſciplinis addicti ab ipſo, & ab ejus auditoribus*

ribus reſcribenda conquiſiverint. Iamvero quis ignorat illud plerumque uſuvenire, & in re præſertim Mathematica, ut ſi ad auctoris manus ſua ſcripta redeant, in jis ne ſe ipſum quidem agnoſcat, vel quod Adoleſcentium alii non ſatis pulchrè literas pingant, vel quod alji non ſatis prompte, quæ dictantur, excipiant, vel quod alii non ſatis attenti, vel quod denique plerique politam latine ſcribendi artem non ſatis calleant. Nactus ſum ex his ſpem, plurimis optatiſſimam me rem eſſe facturum, ſi ipſa ederem. Inter ea, quæ me moverunt, graviora tibi aperui: minimè vereor ne ea repræhendas, imo mihi audeo polliceri fore, ut potius laudes; ſcilicet haud obſcurè oſtendunt, quantum ſtudioſæ iuventutis progreſſui, atque commoditati ſtudeam.

INDEX

INDEX.

PROLEGOMENA. Pag. 1

CAPUT I.

DEFINITIONES IN TOTA ARITHMETICA NECESSARIÆ.

ARTICULUS I.

De Unitate, & Numero. Pag. 26

ARTICULUS II.

De Variis numerorum ſpeciebus. Pag. 28

ARTICULUS III.

De Comparatione Numerorum. Pag. 32

CAP. II.

DE CHARACTERISTICA NUMERORUM.

ARTICULUS I.

De Characteriſtica Integrorum. Pag. 37

ARTICULUS II.

De Characteriſtica numerorum fractorum. Pag. 44

CAP. III.

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICÆ.

ARTICULUS I.

De Operationibus in genere. Pag. 5[illegible]

ARTICULUS II.
Theoremata in toto Algorithmo neceſ-ſaria. Pag. 61

ARTICULUS III.
Do operationibus Arithmeticæ in numeris integris. Pag. 75

ARTICULUS IV.
De Operationiqns Arithmeticæ in numeris fractis. Pag. 114

CAP. IV.

DE COMPARATIONE NUMERORUM.

ARTICULUS I.
De Ratione, Proportione, & Progreſſione Arithmetica. Pag. 157

ARTICULUS II.
De Rationibus in ſe ſpectatis, & de variis earundem ſpeciebus. Pag. 163

ARTICULUS III.
De Proportione, ejus proprietatibus, & variis in ipſa argumentandi modis, Pag. 175

ARTICULUS IV.
De Progreſſionibus Geometricis. Pag. 193

ARTICULUS V.
De Proportione Harmonica, & contraharmonica. Pag. 200

ARTCULUS VI.
De Logarithmis. Pag. 202

Digitized by Google

PROLEGOMENA.

BIBLIOTECA NAZIONALE ROMA

MATHESIS quantitatem, ſeu magnitudinem in genere contemplatur. Variæ hujus determinationes ipſam reddunt Objectum diverſarum illius partium. Quantitas ſub ratione numeri ſpectata objectum eſt *Arithmeticæ*, ſub ratione extenſionis objectum *Geometriæ*. Utramque tradituri Prolegomena hæc inſtituimus, in quibus nonnulla partim ex vulgari notione, partim ex Ontologia petita præmittenda videntur.

Utut eorum multa à pleriſque negligantur, quippequæ vel apud vulgus notiſſima ſunt, vel ſine demonſtratione aſſumuntur, quia vel indemonſtrabilia cenſentur, vel alibi, *v. g.* in Ontologia jam demonſtrata ſupponuntur; quia tamen mens nobis eſt, elementa utriuſque methodo ſcientifica ab omni (ſi per noſtras vires tenuiſſimas illas quidem licuerit) notionum confuſione, qua vulgares omnes laborant, expedita, atque ita ex integro pertractare, ut ipſa evoluentes facultates alias ad ea plenè intelligenda conſulere non cogantur, in his Prolegomenis proſequemur. Certè conſilium hoc improbum non videbitur, cum non poſſit

Digitized by Google

Logica rectificatas ideas commendare iis, quibus tuto pede in ſcientiis incedere mens eſt, quin ſimul inſinuet confuſas labilem inceſſum reddere, atque periculoſum. Atque hìc quidem appoſitè in mentem veniunt non pauci, leves ji quidem Geometrarum ipſorum in ipſis axiomatis lapſus, non ab alia certe cauſa, quam vel ex neglectu rerum ſimplicium, vel ex notionum confuſione profecti, cujuſmodi eſt, quem in Clavio depræhendit Tacquetus circa extenſa congruentia, & longè graviores Phyſicorum in applicatione Matheſeos ad res phyſicas, quæ probabilitates Phyſicæ tantùm proprias ipſi Matheſi communes reddidiſſe Cl. D. Mairano videtur. Si enim Wolfium audiamus, ea applicatio periculi plena eſt, ob eam dumtaxat cauſam, quod probe non diſtinguatutr, quid realis, quid imaginarii involvant notiones Mathematicorum. Ergo nobis Matheſeos ſtudium cum Philoſphia coniuncturis cordi cum ſit cautè in utraque incedere, tum vulgares, tum Ontologiæ notiones diſtinctè explicandæ ſunt, non in confuſa earum notitia aquieſcendum; preſertim cum hac in re facem præferat Wolfius ipſe, qui non ſolum corpori matheſeos multa, quæ ab ipſo in Ontologia fusè traduntur, inſeruit, ſed ipſi in Diſcurſu Præliminari nonnulla ad Logicam ſpectantia præmittere non dubitavit, ut matheſeos in genere ordinem ob oculos poneret; de hoc & nos hìc pauca dicemus, antequam notionum generalium explicationem adgrediamur.

Si teſte Proclo ex matheſi in cæteras facultates ordo proficiſcitur, certè juxta vetus illud Ariſtotelico-

Digitized by Google

telicorum effatum, *propter quod unum quodque tale, & illud magis*, admirabilis plane in ipſa ordo habeatur, oportet. Ordo in genere ex Ontologia nihil eſt aliud, quàm ſimilitudo in coexiſtendo, & ſuccedendo, quæ ex eadem Ontologia non aliunde pendet, quam ex uniformitate regularum, ſecundum quas coexiſtentia, vel ſucceſſiva diſponuntur. Quæ quidem ordinis definitio mirum, quàm recte diſpoſitioni rerum in Matheſi accommodetur. Sive enim demonſtrationes reſpicias, principia certitudinis nec plura, nec pauciora, quam quæ in iis ſufficiant, juxta ratiocinandi regulas ita afferuntur, ut aſſenſum invictè ſemper eliciant, ſi ſint directæ; errorem in poſitione contraria manifeſtiſſimè detegant, ſi ſint indirectæ: quamobrem factum eſt, ut tota matheſeos propria laus ſit, eam antiquiſſimis ſcientiis coævam eadem immutabiliter dogmata conſervaſſe: Sive propoſitionum ſubordinatio conſideretur, ea à genio mentis humanæ à natura ita comparatæ, ut a facilioribus, atque ſimplicioribus ad difficiliora, & complexa magis ſua veluti ſponte aſcendat, tamquam ab inviolabili lege dependet. Hinc *Definitiones*, ſeu explicationes nominum, quibus utitur, ſeu notiones rerum, de quibus agit, *Axiomata*, ſeu Propoſitiones indemonſtrabiles aliquid eſſe affirmantes, *Poſtulata*, ſeu propoſitiones indemonſtrabiles aliquid fieri poſtulantes, demonſtrabilibus, aut ponentibus aliquid eſſe, nempe *Theorematis*, aut aliquid fieri poſtulantibus, nimirum *Problematis* (ut ut vox *problema* extra Matheſim in alio ſenſu ſumatur) præmittuntur. Hinc identidem paragraphi *Scholio-*

rum nomine inſigniti interſeruntur ad ſolvenda dubia, ad tollendas obſcuritates, ad indicandos doctrinarum uſus, fontes, inventores, aliaque hujuſmodi, quæ vel animos excitent, atque admiratione capiant (quod non parum confert, uti docet Pſychologia, ad mentis progreſſus) vel planiorem ante ipſam mentem ſternant viam. Hìc quidem oportunè advertendum in his elementis axiomatum, & poſtulatorum ne mentionem quidem factum iri. Is enim ego ſum, qui inter axiomata, ſeu inter propoſitiones indemonſtrabiles ſolas propoſitiones perfectè identicas recenſeo, veluti *idem cum ſemet eſt idem: impoſſibile eſt idem ſimul eſſe, & non eſſe: quod eſt, eſt* aliaque hujuſmodi; quæ verò ab aliis axiomatum nomine inſigniuntur, videntur mihi primæ quædam illationes ex notionibus ſimplicibus, in quibus rebus tribuuntur eæ primæ notæ, quæ in earum notione primo intuitu diſtinctè perſpiciuntur. At ſi ita ſe res habet, decentiorem habent locum, ubi notiones ipſæ traduntur inter earum corollaria. Quod quidem non ab aliis factum exiſtimo, quia plerumque axiomata proponuntur ex notionibus pendentia, quas turpiter omittunt. Sive demum capitum diſtributio ſpectetur, ſarctam tectam hanc legem ea obſervat, ut præcedant, quæ rationem ſufficientem continent, ne ulla umquam propoſitio demonſtrabilis principii locum teneat in demonſtratione, quæ tamen antea demonſtrata jam non fuerit.

Cui legi tam ſtrictæ profecto adhærent Geometræ, ut ſi contigerit aliqua in demonſtratione opus

eſſe

Digitized by Google

eſſe principio aliquo, quod nec in præcedentibus capitibus locum habuerit, nec ad materiam ejus capitis, in quo eo opus eſt, pertinuerit, filum abrumpant, ipſumque ſub *Lemmatis* titulo demonſtrent.

In quo quidem ordine tam admirabili, vix quidquam deſiderari poſſe videtur; ſi eorum, quæ ſpectant ad diſtinctas rerum ſpecies, ad diſtincta capita reductionem excipias. Certè ea Geometrarum animos etiam nunc ſollicitos tenet; cum præſertim in memoriæ gratiam ab omnibus ſcientiis illud expoſtulet Pſychologia, ut in diſtinctas claſſes ſpecificas diſtinctarum rerum ſpecies diſtribuantur. Quamobrem ægrè ferunt eodem in libro Rectas cum Triangulis, Quadrilateris &c. permiſceri. Defectum hunc aliqua ex parte imminuit Wolfius, ſed eum à Geometria penitus profligare illæſo ejuſdem rigore demonſtrandi, impoſſibile duxit. Cum enim multa *e. g* de Lineis rectis, demonſtrentur Triangulorum ope, de Triangulis ope Parallelogrammorum &c., eam ob rem neceſſariò fit, ut accuratæ demonſtrationis ſolliciti, à Triangulis ad rectas, hinc rurſus ad Triangula, ex his ad Parallelogramma, inde iterum ad Triangula &c. digredi teneantur. Adeo ab ordine in varietate, in quo perfectionem ponit Wolfius, trahor, ut impetrare à me ipſo non poſſim, ut ab ordine naturali diſcedam (licet difficultas mihi in re Mathematica penitus novitio deſperationem quamdam indicat;) interim idem perfectionis amor etiam hoc in ordine Geometricæ, hoc eſt accuratæ demonſtrationis efficit ſtudioſiſſimum. Sed ſatis jam

Digitized by Google

de ordine matheſeos tum in genere, tum de eo, cui adhærebimus. Veniam igitur ad notiones generales, quas cum Wolfio ſyſtemati non inſerui, quia viſæ non ſunt citra naturalis ordinis læſionem in ipſo decentem locum habere, exordium ab his deſumens, quæ in Arithmetica præcipuè uſum habent.

1. Arithmetica, quam meritò dixeris Matheſim univerſalem, eſt ſcientia, quæ circa numerorum naturam, proprietates, & relationes verſatur. Nulla matheſeos pars doctrina relationum quantitatum, quæ non niſi per numeros, ut patebit inferius, determinari poteſt, non indiget; proindeque illa meritò cæteris partibus præmittitur. Ex hoc intelligitur etiam, cur Plato homines à natura ad numerandum bene diſpoſitos ad reliquas omnes, ne dum Mathematicas, diſciplinas idoneos prædicet. Pars ejus Theoretica in contemplatione veritatum ad numeros pertinentium immoratur; Practica verò in quibuſdam operationibus datos numeros ita immutantibus, ſeu modificantibus, ut datas relationes obtineant. Practica vulgaris circa numeros determinatos, circa indeterminatos Practica ſpecioſa verſatur.

2. Ut ſingularum hujuſmodi partium objecta rectè aſſequamini, ad ſequentia attendatis oportet. Duo quælibet entia reſpectu eorum, quibus ſalvis ſubſtitui ſibi poſſunt, *eadem* dicuntur, *diverſa* reſpectu cæterorum: dignoſcitur autem, an aliquid poſt ſubſtitutionem ſaluum maneat, ſi ea vel actu facta, vel ſuppoſita in ordine ad ipſum perinde ſit, ac ſi nulla facta fuerit ſubſtitutio. Sic ſi una libra

plum-

plumbi, uni libræ argenti ſubſtituatur in ordine ad pondus perinde eſt, ac ſi ſubſtitutio facta non eſſet, ſed non in ordine ad valorem; unde illud quidem, ſed non hic ſaluus manet; & hæ duæ metallorum portiones *eædem* dicuntur in pondere, *diverſæ* in ordine ad pretium. Quod ſi hæc ſubſtitutio ſalvis omnibus fieri poſſit, identitas habebitur maxima, & perfecta, ſecundùm quam ſubſtituibilia non amplius eadem, ſed *idemmet* in ſingulari dicuntur; quia tali pacto ſubſtituibilia non duo quidem ſunt, ſed unum per fictionem quamdam conceptum ad modum duorum; Si nimirum ens A habeat prædicata B, & C, & prædicata hujuſmodi ſimul concipiantur ad modum perfectionis, cui ſalvis omnibus ſubſtitui poſſit A, hujuſmodi perfectio, & ens A dicuntur idemmet; ſed hujuſmodi perfectio, quam complent prædicata omnia entis A, eſt ipſum Ens A, adeoque ipſa, & Ens A ſunt unum conceptum ad inſtar duorum, nec Ens aliud ullum D poteſt eadem prædicata ſibi vindicare, quin cum A ſit unum, & idem. *V. gr.* ſi fuerit ſeries quælibet globorum: A, B, C, D &c. C habebit hæc prædicata, quod ſit globus, quod pertineat ad hanc individuam determinatam ſeriem, quod talem dicat ad cæteros ordinem, quæ quidem omnia ſimul concepta nihil aliud ſunt, quam ipſe globus C, & nec in ſerie, nec extra ſeriem, quidquam poteris concipere, cui illa ſimul omnia prædicata conveniant, niſi ſit unum & idem cum globo C. Qua quidem in doctrina duo veniunt conſideranda, identificatio prædicatorum omnium entis A cum ipſo (indiviſio inſe juxta Thomiſtas) & talis

Digitized by Google

eorumdem appropriatio, ut ipſa alteri non poſſit communicare (diviſio à quocumque alio).

3. Ex his, quæ de unitate ediſſerunt Metaphyſici, lucem deſſumit ſenſus, quem eidem tribuunt Arithmetici: apud ipſos nimirum A dicitur *unum* reſpectu B ſecundùm aliqua prædicata, quæ cum B habet communia, dummodo ſit indiviſum in ſe, & diviſum a quocumque alio, ab ipſo etiam B, quocum aliqua prædicata communicat. *v. gr.* globus ligneus relatè ad plumbeum dicitur unum, & contra in ordine ad prædicatum ſphæricitatis, in quo conveniunt, non in ordine ad materiam, ita ut efficiant duas globorum unitates, ſeu duos globos, ſed non duos globos ligneos. Iſta porro convenientia in aliquo prædicato, juxta quam res una relatè ad alteram dici poteſt una, illud eſt, ex quo res ipſæ *homogenea* dicuntur. Sic quia palmus relate ad horam dici non poteſt unum, palmus, vel quælibet alia extenſio ipſi horæ, vel cuilibet alii tempori homogeneus non eſt, ſed heterogeneus, (quæ enim homogenea non ſunt *heterogenea* vocantur). Res, quæ nulli entium generi homogenea eſſe poteſt, *unica* dicitur abſolutè quidem, ſi ſecundùm quodlibet prædicatum nulli homogenea eſſe poſſit; reſpectivè verò, ſi ſecundùm aliquod prædicatum ſolum alteri homogenea eſſe non poſſit; Sic Deus abſolutę unicus eſt, quia in ipſo prædicatum non datur ullum, ſecundum quod cum altera qualibet re convenire poſſit; contra verò in Triangulo rectangulo angulus rectus unicus eſt reſpectivè, hoc eſt, non quia angulus non detur, relatè ad quem ipſe dici poſſit unus, ſed quia non

datur

datur angulus hujuſmodi in eodem rectangulo triangulo, unicus ſcilicet dicitur in ordine ad prædicatum hoc, quod ad Triangulum rectangulum pertineat.

4. Porro unitas, una, alia, atque alia, iterum alia, rurſus alia, adhuc alia &c. ſimul eficiunt *multitudinem*, quæ pro diverſis teſpectibus *magnitudo*, *quantitas*, *numerus*, *totum* vocatur. Si unitates in multitudine ut homogeneæ non ſpectantur, ipſa conuenientius dicitur totum, & unitates dicuntur *partes*, ſecus dicitur aut multitudo, ſeu numerus, aut magnitudo ſeu quantitas; multitudo quidem, ſi ipſæ unitates determinatæ ſint, magnitudo, ſi indeterminatæ. Index, axiculi, rotæ, pendulum, lamella partes ſunt ſimul horologium unum conſtituentes; ſed quoniam earum quælibet una quidem in ſe eſt, ſed non una relatê ad aliam, horologium dicitur potius totum ex his partibus compoſitum; contra verò dentes in rota qualibet multitudo, & numerus ſunt, quia eorum quilibet relate ad alterum dici poteſt unus; Tempus denique, quod ipſum horologium dimetitur, magnitudo, ſeu quantitas dicitur, quamdiu non determinantur partes, ſeu unitates, horæ, minuta &c. quæ ipſum numerent. Quantitas, & numerus ſuper rationem totius addunt homegeneitatem in partibus, qua præciſa, quantitas, et numerus in totum evadunt.

Partium, ex quibus extat totum, quælibet in ſe quidem una eſt, ſed in toto conſideratæ omnes unum ſunt, quamobrem totum, quantitas, multitudo quælibet pro unitate etiam aſſumi poteſt. Hinc Mathematici unitatem quamlibet in alias dividunt,

dunt, atque ſubdividunt, eam non ad inſtar veræ, & in ſe indiviſæ unitatis reſpicientes, ſed ad inſtar totius, numeri, vel magnitudinis. Sic in numeris fractis unitas ſupponitur diviſa, ſed eo ipſo unitas jam amplius non eſt, ſed numerus, (idem ſcilicet cum denominatore fractionis) ut in ſyſtemate apparebit.

Vnitas ergo in ſenſu qnidem proprio prima eſt, atque indiviſibilis quantitatis pars, eaque conſtans, & quantitatis expers (*num.* 3.) ſed unitas Mathematicorum eſt totum quodlibet, quælibet magnitudo, quilibet numerus, atque in magnitudine qualibet quantacumque ejus pars pro unitate eam menſurante determinari poteſt. Quamdiu nondum ullam in toto partem pro unitate determinatam, ſed quamcumque partem pro unitate determinabilem reſpicis, ipſum ad unitatem indeterminatam refers.

Cæterum ſive determinatæ ſint, ſive indeterminatæ, quæ numerum, vel magnitudinem efficiunt, unitates, ſemper, ut ipſæ ſimul quantitas ſint, ut homogeneæ ſpectari debent, &, ſi in jis ſola quantitas attenditur, in ipſa debent identificari. Sic in numero pedum Venetorum tuum non eſt pedem referre nunc ad Pariſinum, nunc ad Romanum, ſed ſingulæ unitates debent convenire in quantitate pedis Veneti.

Aliquando tamen unitates pro data quæſtione ſunt indiviſibiles, attamen quantitatem habent, & quidem diverſam, *v. g.* in exercitu milites unitates ſunt indiviſibiles, ſed ſuam ipſi habent altitudinem; nec omnes eandem; ſed tum atten-

ditur

Digitized by Google

ditur ſolum eſſe ſpecificum militis, quod ſimplex eſt, in ordine ad quod unus cum altero quantitate convenire proprie dici non poteſt, aut differre,

Unitatum multitudo, ſeu numerus à quo rei quantitas pendet, pro unitatum diverſitate in eadem quantitate diverſus eſt. Sic, ſi unitas eandem altitudinem numerans ſit decempeda, multitudo unitatum in ea altitudine diverſa eſt, ac ſi unitas ſit pes. Sed unitate determinata ipſa quoque determinatur multitudo, & quantitas inde ipſa. Et cum ens intelligi nequeat, niſi omnes ejus determinationes agnoſcantur, etiam quantitas nonniſi per unitatem, ad quam refertur, intelligitur.

Quantitatem, ſeu magnitudinem in genere definit Wolfius per id, quod non intelligitur, niſi per relationem ad unitatem; & ſenſui quidem noſtro conformiter, in quo notionem quantitatis à notione multitudinis, & notionem multitudinis à notione unitatis repetimus. Quantitas alia permanens eſt, alia ſucceſſiva: permanens, cujus partes ſimul exiſtunt, ſucceſſiva, cujus partes ſucceſſivè exiſtunt. Parte una temporis deſinente alia incipit, adeoque ipſum quantitas eſt ſucceſſiva; ſed parte una ſpatij exiſtente alia quælibet coexiſtit, adeoque ipſius quantitas eſt permanens. Utraque dividitur in continuam, & diſcretam. Continua ea eſt, inter cujus partes nihil interponi poteſt; inter cujus partes aliquid interponi poteſt, diſcreta. Spatij partes ita coexiſtunt, ita ſibi ſucceduut partes temporis, ut inter ipſas nihil interjici

rjici poſſit, proinde quantitates continuæ ſunt: Stellæ omnes, ex quibus ſtellarum multitudo componitur, ita diſpoſitæ ſunt, ut inter ipſas aliquid poſſit locari; multitudo proinde hujuſmodi quantitas eſt diſcreta. Omne, quod in re qualibet ineſt, id vel quantitas eſt, vel qualitas. Cum ergo quantitas ſit multitudo unitatum determinatarum, aut indeterminatarum, qualitas erit id omne, quod ineſt in ente, nec eſt multitudo unitatum determinatarum, aut indeterminatarum; quæ propterea meritò à Wolfio definitur per id, quod intelligi poteſt ſine relatione ad unitatem.

5. Nihilum pluribus modis definiri ſolet à Metaphyſicis; Wolfio eſt id, cui nulla reſpondet notio, Erhardo Weigelio, id quod cogitamus, cum plane non cogitamus, aliis id, quod relinquitur re ſublata, aliis id, quod eſt impoſſibile, ſeu quod contradictionem involvit. Hi omnes ſenſus ſunt nihili abſoluti, ſeu nihili entis in genere. Nihilum dati entis poſſet definiri per id, cui nullo conveniunt modo, quæ ad dati entis notionem pertinent; Sic qui nihil poſſidet pecuniæ, nullum patitur ſibi tribui prædicatum eorum, quæ pecuniam poſſidenti conveniunt, abnuit eleemoſinam petentibus, ad tabernam invitantibus &c. Nihilum quantitatis illud eſt potiſſimum, de quo loquuntur quandoque Mathematici, & merito definiri poſſet per id, cui quantitatis notio, & prædicata nullo modo conveniunt. Sed juverit ad ſtatum nihili ex quantitatis notione deſcendere. Quantitas ex unitatibus coaleſcit, atque hæ à Mathematicis ex aliis unita-

Digitized by Google

unitatibus adhuc coaleſcentes conſiderantur, iterum iſtæ ex alijs in infinitum (*ex num.* 4.) ſed vera unitas ex aliis non coaleſcit (*ex num. cit.*) ipſa quantitas non eſt, ſed primum quantitatis principium. Quod, ſi quemadmodum quantitatem ſucceſſivè unitate mulctantes ad unitatem deſcendimus, ita ex ipſa deſcenſum hujuſmodi proſequamur, ſtatim ac unitatem hanc ultimam removeris, ad ſtatum nihili tibi ventum eſt. Ulterius ſi unitates removere pergas, ſtatus reſpondens huic unitatum remotioni à nihilo deficiet per numerum unitatum ablatarum. Hujuſmodi defectus quantitatum verarum à nihilo dicuntur quantitates *negativæ*, *privativæ*, *abſurdæ*. Abſurdæ quidem merito dicuntur quantitates negativæ, oriuntur enim, & coaleſcunt ex unitatibus a nihilo, ex quo quidquam demere repugnat, demptis. Sed ea fictio, juxta quam ad modum quantitatum conſiderantur, veri vicaria eſt.

A

P . . . . . ——— Q. Pergat Viator ex A in Q, nihil itineris ipſe perfecit, quamdiu manet in A; ſed primo verſus A paſſu progreſſus iter incepit, quod tanto majus evadit, quantò pluribus verſus Q paſſibus promovetur, quantòque minor eſt diſtantia inter ipſum, & terminum Q, iter ſcilicet creſcit decreſcente ejus diſtantia a termino Q, decreſcit eadem creſcente. Quod ſi ergo ex A regrediatur in P, minus itineris perfeciſſe dicetur, quam ubi manebat in A; ſed in A nihil perfecerat itineris; igitur in P minus nihilo ejus iter erit reputandum. Quantitas AP hoc in caſu negativa eſt, non quia prodeat ipſa paſ-

ſibus

ſibus ex nihilo ſublatis, quod utique abſurdum eſt, ſed quia in hypotheſi, quod terminus itineris ſit in Q, & initium in A, ex nihilo ſubtrahi quodammodo videntur. Revera, ſi terminus ſtabiliatur in P eadem numero AP evadet poſitiva, & AQ negativa quantitas. Quatenus ex nihilo ſubtrahi fingitur quantitas negatiua, nullum omittere debet eorum reſpectuum, quos habet, dum ut poſitiva conſideratur, nec immutat quidpiam in ipſa ea fictio; ut ſi poſitiva ſit æqualis alteri poſitivæ, negativa etiam alteri eidem negativæ æquari debet. Revera enim quantitas quæcumque ſemper cum ſe ipſa eadem eſt, qualiſcumque tandem ſit ejus conſideratio. Recta AQ ſemper eſt recta AQ ſive terminus itineris ſit in Q, in quo caſu eſt poſitiva, ſive ſit in P, in quo caſu eſt negativa. Centum aurei ſunt ſemper centum aurei, ſive conſiderentur ut ab Titio ſolvendi, cujus reſpectu erunt quantitas negativa, ſive ut Sempronio reddendi, cujus reſpectu erunt quantitas poſitiva. Nihilum ergo eſt quoddam veluti medium inter affirmativas, & negativas quantitates.

6. Si res unitate deſignata ſit ens in genere, multitudo hujuſmodi unitatum nullam rerum determinatam ſpeciem numerabit, ſed ad numerandam quamlibet erit determinabilis, ſicuti unitates ipſæ. Porro quantitas illius eſt ſpeciei, ad quam referuntur unitates eam componentes, poſitiva ſi illæ poſitivæ, negativa ſi negativæ, continua, ſi continuæ, diſcreta ſi diſcretæ &c. (*num.* 4. *&* 5.) unde dicta multitudo ad quantitatem quamlibet numerandam erit applicabilis, ſi ejus unitatibus ens

bus ens in genere deſignantibus eæ adjiciantur determinationes, quas habet ipſa quantitas. Ex homogeneitate autem, quam inter ſe unitates habere debent (*num.* 3:) ſtatim illud ſequitur, hujuſmodi multitudinis unitates adhiberi non poſſe ad numerandas diverſas quantitatis partes, ita ut una applicetur exprimendæ parti centeſimæ, alia adhibeatur ad exprimendam partem decimam: Alias enim in ipſa non ſolo numero, ſed ſpecie ipſa differrent. Hinc in determinationibus quantitatis recenſebitur ſpecies entis, ad quam ipſa ſpectat, qualitas partis, ad quam numerandam generica unitas applicari intelligitur, & multitudo unitatum genericarum quantitatis partes omnes numerans. Hæc ſi in quantitatibus eadem fuerint, quantitates ipſæ eædem erunt, ſi diverſa, diverſæ. Quod ſi quantitates fuerint eædem, hæc eadem in ipſis pariter erunt, ſi diverſæ, aut omnia, aut eorum aliqua diverſa erunt. Sic centum aurei, & bis quinquaginta aurei, & in ſpecie aureorum, & in parte pro unitate ſumpta, & in multitudine hujuſmodi unitatum conveniunt, adeoque ſunt eædem pecuniæ quantitates; ſed cum hæc eadem non ſit in centum aureis, & quingentis denariis, hæ erunt diverſæ pecuniæ quantitates, & contra quia hæ poſtremæ ſunt diverſæ pecuniæ quantitates, in dictis determinationibus non conveniunt.

In duabus autem quantitatibus in genere, ſeu quarum unitates ens in genere deſignant, prima conditio non requiritur ad identitatem ipſarum, quia ex ente in genere determinationes ſpecificæ excluduntur. Quoniam porro in una eademque rerum

rerum ſpecie infinite diverſæ quantitates habentur, tum pro diverſa multitudine partium, quas habent tota ad eam ſpeciem ſpectantia, tum pro diverſitate ipſarum partium pro unitate ſpectabilium *v. g.* (In ſpecie extenſionis linearis infinitæ diverſæ dantur lineæ diverſas palmorum multitudines continentes, & una eademque linea diverſa multitudo eſt unitatum pro diverſitate menſurarum, quæ loco palmi pro unitate aſſumi poſſunt) multitudo generica, quæ non ſolum ad quantitates omnes numerandas, ſed etiam ad numerandam eamdem modis omnibus apta eſſe debet, infinitè diverſis modis unitatem genericam continet. Modi hujuſmodi ſunt nnmeri individui, de quibus in Syſtemate. Quantitatibus ſolo numero differentibus exprimendis illi individui numeri applicantur, qui unitatem in genere eodem modo continent, ac quantitates ipſæ unitates ſuas: &, ſi idem pro unitate ſumatur in duabus quantitatibus, ipſæ eædem ſunt, ſi eodem numero numerantur, diverſæ, ſi diverſo.

7. Habetis jam primitivas unitatis, multitudinis, magnitudinis, ſeu quantitatis, totius, partis, aliaſque notiones, quas Arithmetica ſupponit. Ex his derivativæ nonnullæ ejuſdem in Arithmetica neceſſitatis componuntur, ad quas priuſquam deveniam, principia quædam ex dictis immediatè fluentia hìc recenſebo, in quibus prima prædicata, quæ in ipſis notionibus diſtinctè eluceſcunt, ſubjectis definitis tribuemus.

a Quantitas quæcumque pro unitate aſſumi poteſt reſpectu alterius homogeneæ. Fluit immediate ex notione homogeneorum. Sic A, A, A

quæ

quæ ſolo numero differunt, in cæteris conveniunt, homogeneæ ſunt, & una relate ad alteram dici poteſt una, proinde quælibet pro unitate aſſumi poteſt relatè ad alteram, & ipſæ eodem modo numerari, quo numerantur unitates ſimplices, ita ut A, A, A efficiant 3 A, ſicuti 1, 1, 1 efficiunt 3. Revera in ipſo vulgari uſu numerari ſolent quantitates ad inſtar unitatum, quando ſunt homogeneæ, ut nos exigimus. Sic Aſſes Romæ numerus ſunt Teruntiorum, Oboli Genuæ numerus Denariorum, ipſi tamen numerantur ad inſtar unitatum; ſed obſervatur, ne dicantur unum, niſi reſpectu aſſium aſſes, obolorum oboli.

b Quantitati cuilibet præfixa intelligi debet unitas, ita ut A. & 1. A. ſint expreſſiones eædem; (*fluit ex a*)

c Si duæ quantitates poſitiva altera, altera negativa ex totidem unitatibus conſtent, quantum una ſuper nihilum adiicit, tantum ex eodem altera demit, adeoque perinde eſt, ac ſi nihil adiiciatur, nil dematur (*num.* 5.) & ipſæ efficiunt nihil.

d Quantitates negativæ homogeneæ ſunt ſecundùm eoſdem reſpectus, ſecundùm quos tales erant, quando erant poſitivæ. Patet ex *nnm.* 6.

8 Cum duas quantitates ſimul concipimus, & per ſubſtitutionem eorum, quæ ipſis inſunt, aut aliquid, aut nihil in ipſis immutari depræhendentes easdem eſſe, vel diverſas judicamus, eas inter ſe comparare, ſive ad ſe invicem referre dicimur: Relatio ſiquidem in genere omnis fit res in ſe prius, & ea, quæ in rebus inſunt, conſiderando, & de earum identitate, vel diverſitate judicando, quod

quidem judicium ſubſtitutionis examen ſupponit: Variæ identitatum, ac diverſitatum ſpecies conſtituunt varias ſpecies relationum, quarum una eſt identitas, aut diverſitas rerum ſecundùm quantitatem; & dicitur earundèm *Ratio*; prima quidem ratio *æqualitatis*, altera *inæqualitatis*. Adiicit cum Leibnitio Wolfius determinationem aliquam ipſi relationi, exigens ipſam talem, ut per eam quantitas una ex alia dignoſcatur; ſed id omnium omnino relationum proprium eſt, ut per eas ex iis, quæ inſunt in relatorum uno, intelligantur, quæ inſunt in altero. Statim ac enim duo in relatione eadem eſſe conſtat, ex prædicatis unius prædicata alterius innoteſcunt: ſtatim ac conſtat eſſe diverſa in relatione in genere, & innoteſcit modus diverſitatis in relatione in ſpecie, pariter ex prædicatis unius innoteſcunt prædicata alterius, ita ut relatio in genere poſſit etiam definiri per actum mentis rei uni prædicata tribuentis ex conſideratione rei alterius; ſimultanea quippe rerum conſideratio, de qua mentionem fecimus in ſuperiori definitione, imo & conſideratio rerum in ſe ad relationem non pertinent, ſed prærequiruntur. Sed in exemplis etiam videre poſſumus rationi quantitatum immeritò tribui ſupra relationes cæteras illud privilegium, ut unum relatorum in ea ex altero determinetur, ac intelligatur. Numerus bis ſex ſtatim agnoſcitur ex æqualitatis ratione, quam habet ad ipſum duodenarius, ex hujus prædicatis omnibus determinantur, & agnoſcuntur omnia prædicata illius. Per rationem inæqualitatis ex duodenario agnoſco prædicata generalia alterius numeri *v.g.* ea omnia, quæ habet

habet numerus in genere, tum diverſitatem in genere prædicatorum hujus numeri à prædicatis duodenarii, quatenus duodenarius eſt. Quod ſi hæc inæqualitatis ratio determinetur, & ſtabiliatur majoris, vel minoris, ratio huiuſmodi diverſa in genere etiam ſpecificabitur, *v. g.* ante determinationem hanc rationis ſolùm innoteſcebat in genere numerum hunc incognitum non eodem modo continere 1, 2, 3, &c. poſt ipſam verò illud etiam innoteſcet, continere pluries, vel paucioribus vicibus. Si denique ipſa inæqualitatis ratio tripla, quadrupla &c. ſubtripla, ſubquadrupla &c. ſit, illud etiam conſtabit, quot præciſe vicibus contineat unitatem, vel datum numerum, quinam numerus præcisè ſit. Sed nonne etiam hæc præſtant relationes ceteræ? Liceat hic afferre exemplum, quod adhibet ipſe Wolfius ad contrarium evincendum. *Talis eſt*, ait ipſe, *ſinus recti ad ſinum complementi in Trigonometria* (ſupple) *relatio*, quæ tamen in rationum numero non habetur, quippe per eam unum ex alio non determinatur, atque intelligitur. At, vel ſinus rectus comparatur cum ſinu complementi ſecundum modum, quo ad datum arcum refertur in ſua poſitione, & tum nonne ex hoc modo innoteſcit modus, quo ſinus complementi, ſeu coſinus tum ad arcus complementum, tum ad arcum ipſum refertur in ſua poſitione? Certe hæ poſitiones non ita procul a ſe invicem differunt, imo ad ſe ita prope accedunt, ut ſinus dicatur coſinus, & coſinus ſinus ſalva hac poſitione ad ſuos reſpectivos arcus. Quidni ergo poſitio unius ex poſitione alterius ſufficienter non intelligetur? Vel ſecundum quantitatem; &

 tum

tum ex Trigonometria uno dato alter invenietur; ex *Prob.* 1. *Trig. Wolf.* §. 16. Immerito ergo rationem a cæteris relationibus per hoc diſtinguit Wolfius, quod per eam terminus unus ex alio determinetur. Addit etiam ſine homogeneo aſſumpto, ſed nec homogeneum aſſumptum in cæteris relationibus eſt neceſſarium; ſiquidem eæ, æquè ac quantitatum ratio, qualitates ſunt. Imo in ratione intelligenda tertium quidem homogeneum non eſt neceſſarium, ſed ut per rationem quantitas una ex alia determinetur, neceſſe eſt, ut una detur, nec dari certe poteſt quantitas ulla ſine relatione ad homogeneum, at id non evenit in cæteris relationibus. Hinc ita mecum ſtatuo rationem cum relationibus omnibus convenire in genere, ab iis non per aliud differre, niſi per hoc, quod relata in ipſa ſint quantitates, in illis non item, & relationes ipſas omnes à relatis nomen deſumere.

Ergo tutum de æqualitate judicium fertur, quando unitas in una quantitate eſt pars ejuſmodi, ut ſubſtitui poſſit parti, qnæ eſt unitas in altera ſalva relatione, quam hæc habet ad totam quantitatem, & numerus idem exprimit unitates utriuſque, ſeu, cum numerus exprimat modum, quo multitudo unitatem continet, ſi hujuſmodi unitatem eodem modo continent, & vice verſa ſi æquales ſunt, eamdem unitatem eodem modo continent; ſi autem eamdem unitatem non continent eodem modo aut eodem modo continent diverſas, inæquales ſunt, & contra. Ut autem intelligatur, quid ſit hujuſmodi relatio partis ad totum, ex qua partes qualitatem deſſumunt; ea nihil aliud eſt,

eſt, quam modus, quo in ipſo toto continetur. Si ita continetur, ut aliquoties ſumpta ipſum adæquet, vel aliquoties ex eo detracta ipſum annihilet, dicitur aliquota, & in ſpecie, ſecunda, tertia, quarta, &c. ſi numerus exponens ejus repetitionem ſit 2, 3, 4, &c. ſi ſecus, aliquanta. Partes aliquotæ dicuntur etiam in Arithmetica menſuræ. Igitur ſi fuerint quantitates A, & B, pars X, quæ eſt unitas in B, ſubſtitui poteſt parti Z, quæ eſt unitas in A, ſi, facta ſubſtitutione ipſius X in locum Z, ſalvus manet modus, quo Z continetur in A.

Porro inæqualitatis ratio in duas dividitur ſpecies; inæqualium enim unum totum alterius parti neceſſariò æquale eſt, & eorum primum dicitur *minus*, alterum *majus*, ratio verò illius ad hoc dicitur *minoris inæqualitatis*, & ratio ſecundi ad primum dicitur *majoris inæqualitatis*. De majori, & minori judicium qua ratione ferendum ſit, ex dictis liquet ſatis, ſi nimirum ex duobus unum unitatem eandem pluries continet, quam alterum, aut ſi numerus exponens unitatis ejuſdem repetitionem in uno major fuerit, quàm in altero, illud quoque hoc majus erit, & contra. Conſultum eſt quandoque quantitatum ipſarum unam totam pro unitate aſſumere. Signum æqualitatis eſt $=$, majoris inæqualitatis $>$, minoris inæqualitatis $<$; ita ut $a = b$, $a > c$, $a < d$ ſignificet quantitatem a ipſi b æqualem, majorem ipſa c, & minorem ipſa d. Quodſi ad expoſitam rationum naturam animum bene advertas, illud facile agnoſces, eas omnes pendere a modo, quo quantitates continent unitatem eamdem, ſeu, ſi earum una pro

Digitized by Google

unitate ſumatur (*num.* 4.) à modo, quo earum alterutra aliam continet. Heterogenea, quæ (*num.* 3.) ad unitates ſpecie diverſas referuntur, unitatem eandem propriè, nec eodem modo, nec diverſo continent, ac proinde nec æqualia dici poſſunt, nec inæqualia, ſeu nullum rationis genus ad ſe invicem dicere, contrario verò modo ſe res habet in homogeneis.

Privativæ quantitates iis poſitivis, quarum ſunt defectus, heterogeneæ ſunt, nullum enim dari poteſt prædicatum, in quo unitas relata ad ens conveniat cum ea, quæ ad non ens refertur; hinc nec æquales, nec inæquales dici debent. Sed privativæ duæ inter ſe homogeneæ ſunt, quando poſitivæ, quarum ipſæ defectus exprimunt, homogeneæ ſunt. Prædicata enim utriuſque ſunt negationes eorundem prædicatorum in poſitivis; atque hinc inter ſe rationem dicunt; imo fieri poteſt, ut ratio duarum ſit eadem cum ratione duarum aliarum, ſi reſpectivæ poſitivæ eamdem rationem dicant. De ratione redibit ſermo in ſyſtemate. Identitas duorum ſecundùm qualitates dicitur *ſimilitudo*, ejuſque ſignum eſt ∽, diverſitas *diſſimilitudo*. Leibnitius ſimilia appellat, quæ non diſtinguuntur, niſi per compræſentiam; verè quidem; compræſentia enim, aut immediata in ſimilibus, & æqualibus, aut mediata, &, ut ita dicam, mentalis, in inæqualibus diſcernendis eſt neceſſaria. Sed negativum hoc prædicatum eſt ſimilium attributum, non eſſentia; qua propter ab hujuſmodi definitione meritò cum Wolfio (§. 24. *Ar.*) diſcedimus. Ex his omnibus fluunt ſua ſponte ſequentia univerſalia principia.

c Cum

e Cum idem ſalvis omnibus, adeoque ſalva & ipſa quantitate ſibi ſubſtitui poſſit, idem ſibimet æquale eſt. Duæ autem quantitates vel ſibi ſubſtitui poſſunt invicem, vel non; ergo vel ſunt æquales, vel inæquales. Eadem ratione evincam idem ſimile eſſe ſibimet, & duorum quorumlibet alterum alteri vel ſimile eſſe, vel diſſimile.

f Si duæ quantitates A, & B ſint æquales eidem tertiæ C, loco C ſubſtitui poteſt B ſalva quantitate; Sed A ſalva quantitate poterat ſubſtitui ipſi C (*hyp.*) ergo etiam ſubſtitui poterit ipſi B ſalva quantitate, adeoque A, & B æqualia eidem tertio C æquantur inter ſe. Similiter ſi A, & B æquantur æqualibus C, & D, erunt etiam æqualia inter ſe. Nam (*hyp.*) A = C ſed (*hyp.*) C = D ergo A = D (1. *part. num. hujus*) ſed pariter (*hyp.*) B = D ergo (1. *part. num. hu.*, A = B. Simili prorſus modo evincam ſimilia eidem tertio, imo & ſimilia ſimilibus inter ſe ſimilia eſſe. Nemo etiam libenter non tribuet, ut æqualia inter ſe cum aliquo tertio, vel aliquibus æqualibus, aut ſimilibus æqualia eſſe, aut ſimilia aſſumamus; ex quo enim duo in quantitate, vel qualitatibus identificentur, non excluditur tertium, ſaltem poſſibile ejuſdem quantitatis, vel qualitatum earumdem.

g Si æqualium unum ab alio ſemel auferatur, ſtatim evaneſcit tota hujus quantitas, adeoque remanet nihilum, (*num.* 4.) ex quo iterum auferri non poteſt. Igitur æqualium unum alterum non niſi ſemel continet; & vice verſa, ſi quantitas una alteram ſemel continet tantùm, alterutra ex alia detracta ſtatim nihilum remanet, quod indicio eſt

unam

unam nihil aliud præter aliam continere, adeoque ipſas æquales eſſe.

h Idem æquale eſt ſibimet (*e*) ergo ſe ipſum nonniſi ſemel continet [*g*]

i Partes totum componentes ſimul ſumptæ ſunt ipſum totum (*num.* 4.) unde ſimul ſumptæ cum toto identificantur, etiam ſecundum quantitatem; ſeu cum ipſo æquantur.

k Minus majoris parti æquale eſt (*num.* 8.) unde majus eſt veluti totum compoſitum ex minori, & alia adhuc parte, quæ dicitur *differentia*, & cum totum partes omnes ſimul contineat (*num.* 1.) majus continet minus, & differentiam.

l Inæqualia ita ſunt inter ſe comparata, ut unum totum toti alteri æqnale eſſe non poſſit (*num.* 8.); remanet ergo, ut aut pars unius æquetur alteri toti, aut totum unum æquetur alterius parti: nimirum inæqualium unum neceſſariò majus eſt, alterum minus [*num.* 8.]

m Si A ſit æquale B, & C ſit majus quam A, erit etiam majus quam B. Nam (*hyp.*) $C > A$. Sed (*num.* 8.) loco A ſubſtitui poteſt B, ergo $C > B$. Simili modo oſtenditur, ſi ponatur $C < A$, fore etiam $C < B$.

n Sit totum quodcumque T compoſitum ex partibus X, & Z, ponatur X æqualis V. Igitur tota $V = X$ parti totius; ſed $T > V$ (*n.* 8.); ergo etiam eſt majus X (*m*) ſcilicet totum eſt majus qualibet ſua parte, & pars quælibet ſuo toto minor eſſe debet.

o Si $A = B$, & $A > C$, cum loco A ſubſtitui poſſit B, (*n.* 8.) erit etiam $B > C$; &, ſi fuerit $C = D$, &

A >

Digitized by Google

A $>$ C, erit etiam B $>$ D; nam A $>$ C (*hyp.*) ſed C $=$ D (*hyp.*) ergo A $>$ D (1.*p.num. hujus*) ſed A $=$ B (*hyp.*) ergo (*m*) B $>$ D: eadem ratione, ſi unum æqualium minus ſit eodem tertio, eodem minus eſſe alterum evincetur, & ſi æqualium unum uno æqualium minus ſit, alterum altero eſſe etiam minus.

p Quodſi A ſit majus B, & B adhuc majus C, pars ipſius A, quæ æquatur toti B (*n.* 8.), erit major toto C (*o*) adeoque à fortiori totum A majus erit, quam C, & (*l*) etiam C multo minus dici debebit ipſo A, ſcilicet quod minore minus eſt, adhuc multo minus erit majore, uti quod majore majus eſt, minore adhuc eſt majus.

q Quantitas ſtatim ac ſuſcipit mutationem, fit diverſa ab ea, quæ erat antea; diverſitas autem quantitatum eſt earumdem inæqualitas (*num.* 8.) & inæqualium unum neceſſariò majus, aliud minus, (*l*) quantitas ergo non mutatur, niſi, ſi major, vel minor evadat, niſi incrementum ſuſcipiat, aut decrementum, ſeu ut phraſi communi utar, niſi ſcuſcipiat magis, & minus.

Atque hæ quidem ſunt eæ notiones, quarum rectificationem adeo ſub initium commendavimus, earum uſum ex ipſis principiis jam per eas oſtenſis agnoſcere poteſtis, longe plenius cognituri, & in matheſi tota, & frequentiſſimè in ipſa etiam Philoſophia; ex qua vos ad hæc prolegomena ſæpe provocabo. Ne miremini, ſi terminis ſæpe uſus ſum ontologicis; ideo enim eos adhibui, quia mihi res

Digitized by Google

mihi res eſt vobiſcum, qui utriuſque facultatis ſtudia coniungitis; imo ex hoc ipſo lucem, quam Matheſi affundit Ontologia, recognoſcite.

CAP. I.

DEFINITIONES

IN TOTA ARITHMETICA NECESSARIÆ

ARTICULUS I,

De Unitate, & Numero.

Definitio I. DEterminatio modi, quo quantitas quælibet unitatem continet, aut in unitate continetur, *Numerus* appellatur: Illud vero homogeneum, ad quod pro lubitu quantitatem ipſam referimus, dicitur *Unitas*.

Corollarium I. UNitas ſive rigide ſumpta, ſive arbitraria, aut quantitatem non exprimit, aut id, quod exprimit, ut quantitas non conſideratur (*num.* 4. *Prolcg.*) quamobrem numerus dici non poteſt (*Def.* 1.) ſed potius, cum exprimat id primum, quod ſupra nihilum ponit quantitas (*num.* 5. *Prol.*) principium numeri dici debet.

Scholion I. *EXcipies fortaſſe unitatem non eſſe principium eorum ſaltem numerorum, quibus determinatur modus, quo quantitas in unitate continetur, ſed eorum potius finem. Verum eo in caſu unitas ipſa ad inſtar numeri conſidera-*

ſideratur, & vel ipſe numerus unitate minor, vel aliqua ipſius pars ad inſtar unitatis (num 4. Prol.) *Hora* v. g. *quantitas eſt durationis, quæ reſpectu alterius temporis quantitatis æqualis una dicitur, ſed reſpectu duorum quadrantium, qui in ipſa continentur, unitas non eſt, ſed quadrantium numerus, cujus unitas eſt quadrans unus, medietas nempe temporis, quod duobus quadrantibus numeratur.*

Cor. 2. MOdus, quo quantitas unitatem, continet, pendet à vicibus, quibus unitas nihilo addenda, vel repetenda eſt, ut ipſa adæquetur (*num.* 8. *Prol.*) numerus ergo, qui modum hunc determinat, ipſas vices determinet neceſſe eſt.

Sch. 2. *HInc numerus, ſicuti ex repetitione partis ſuæ pro unitate ſumptæ reſultat quantitas, ex repetitione vicis unius prodire, veluti ex unitate utiliter fingitur, & quemadmodum in unitate arbitraria Mathematicorum aliæ adhuc partes, vel unitates contineri ſæpe fingimus, ita in una vice partes dari etiam fingemus, ita ut perinde ſit dicere quantitatem continere dimidiam, tertiam &c. unitatis partem, ac eamdem continere unitatem dimidia vice, vel tertia, quarta &c. parte unius vicis.*

Cor. 3. QUantitas augetur ex unitatum additione, numerus ex additione vicium, quæ ad ipſum, ut unitates, ſe habent [*Sch.*2.) ut igitur quantitas omnis augeri, atque imminui poteſt (*q. in Prol.*) ita & numerus quilibet.

Cum

Cor. 4. CUm in numero unitatum locum tueantur vices (*Sch.* 2.) quæ in ſe, nec diſcretionem, nec continuitatem, nec coexiſtentiam, nec ſucceſſionem dicunt, ſed communiter ad hæc omnia indifferentes habentur; numerus omni quantitatum generi exprimendo, & determinando idoneus eſt.

ARTICULUS II.

De Variis numerorum ſpeciebus.

Def. 2. NUmerus, in quo vices unitatum inſtar ſe habent, dicitur *numerans*, quantitas vero ipſa, cujus relatio ad unitatem exprimitur per numerum, dicitur numerus *numeratus*.

Sch. I. N*Umerans etiam definitur, per eum, cujus unitates nulli rerum generi exprimendo deſtinantur, & ad omnia rerum genera ſunt determinabiles; numeratus, qui contra, juxta ea, quæ innuimus* (num. 6. Proleg:) *ſed præſens noſtra definitio, & eamdem, quam prædicta, præſefert fæcunditatem, & interim ad communem loquendi uſum magis accedere uidetur. Numerando nimirum exploramus, quoties in numerata multitudine unitas repetatur, vel quot vicibus contineatur; & dimetiendo (metiri, & numerare in hoc tantum differunt, quod unitates ibi ſint continuæ, unitæ, hic ſecus, niſi metiri, ponamus in actu, quo unitas metiens menſurando applicatur) inquirimus, quoties unitas pro menſura aſſumpta menſurando applicari poſſit*

Digitized by Google

poſſit; cum igitur illud quoties *numero numerante in utroque caſu exprimamus, liquet ejus unitates nos ad vices, non ad ens in genere communiter referre.*

Def. 3. EX *num. 6. Proleg.* numerus intrinſece determinatur ab unitate, & a modo, quo unitatem continet; unde numerus *determinatus* eſt, in quo unitas, & modus unitatem continendi determinantur; *indeterminatus*, in quo aut alterutrum, aut utrumque tamquam determinabile conſideratur.

Def. 4. UNum cum uno appellantur *duo*; duo cum uno dicuntur *tria*, tria cum uno *quatuor*, quatuor cum uno *quinque*, quinque cum uno *ſex*, ſex cum uno *ſeptem*, ſeptem cum uno *octo*, octo cum uno *novem*; & hi quidem numeri omnes dicuntur ſimplices, vel unitates, vel articuli primi ordinis, novem cum uno *decem* dicuntur, qui numerus compoſitorum primus eſt.

Def. 5. UBi ad denarium ventum eſt, ſemper reaſſumitur initium numerandi. Duæ decades efficiunt *viginti*, tres *triginta*, quatuor *quadraginta*, quinque *quinquaginta*, ſex *ſexaginta*, ſeptem *ſeptuaginta*, octo *octuaginta*, novem *nonaginta*; atque hi articuli ſecundi ordinis.

Def. 6. DEcas decadum dicitur *centum*, duæ dicuntur *ducenta*, tres *trecenta*, quatuor *quadringenta*, quinque *quingenta*, ſex *ſexcenta*, ſeptem *ſeptingenta*, octo *octingenta*, novem *nongenta*; hos autem dico articulos tertii ordinis.

Decas

Def. 7. DEcas centenarum dicitur unum, & uſque ad centum ejuſmodi decades excluſive eadem obtinent nomina, quæ unitatibus, & decadibus impoſita ſunt *in Def.* 4. & 5. addita tamen voce *mille*; atque hi articuli quarti ordinis. Centum hujuſmodi decades dicuntur unum, & uſque ad centum excluſive obtinent nomina (*def.nis* 6.*æ*) addita voce *mille*; atque hi articuli quarti ordinis.

Def. 8. DEcas centenarum millium dicitur unum, adiectâ particula *millio*, & uſque ad millionem excluſive gaudet reſpective nominibus, quæ allata ſunt in *def.bus* 4. 5. 6. 7. adiecta ſemper particula *millio*, atque hi articuli ſexti, & ſeptimi ordinis.

Def. 9. MIllio millionum dicitur unum, & uſque ad millionis millionem eadem habet nomina, quæ *in def.* 9. millionibus tribuuntur, excepta particula *millio*, in cujus locum ſubrogatur *billio*. Millio *billionum* vocatur rurſus unum adjecta particula *trillio*, millio trillionum dicitur *quadrillio*, millio quadrillionum *quintillio*, quintillionum *ſextilio* &c. qui etiam claſſes articulorum conſtituunt ordinum ſucceſſivorum.

Cor. 1 NOmina igitur trium primorum articulorum in omnibns conſequentibus, ſi terni terni ſumantur, repetuntur cum aliqua adjecta particula, quæ in ſingulis claſſibus trium diverſa eſt, adeoque juvat numerum quemlibet concipere diviſum in claſſes trium articulorum.

Cor. 2. SImiliter quoniam ſex nomina primorum articulorum repetuntur in ſex

ſex articulis conſequentibus, (*def.* 9.) conſultum eſt numerum concipere diviſum in claſſes ſex notarum, quibus poſt prima ſex nomina aliqua adjicienda eſt particula earum, quæ *in def.* 9. recenſentur.

Def. 10. SI numeri diſponantur eo ordine, quo ipſos definivimus, ita ſcilicet, ut conſequens antecedentem unitate excedat, ſeriem naturalem conſtituunt, in qua primus, tertius, quintus &c. alternatim procedendo, dicuntur *impares*, ſecundus vero, & alternatim procedendo quartus, ſextus &c. *pares*.

Cor. PArium primus eſt binarius, ſecundus autem conſtat ex unitate, & ternario (*def.* 4.) hoc eſt ex unitate, binario, & unitate (*def.* 4.), ex duobus ſcilicet binariis (*def.* 4.) eadem ratione oſtendam parem quemlibet ex tot binariis, quot unitates habet numerus exponens ejus ordinem in ſerie parium, conſtare, nimirum par quilibet oritur ex binarii pro unitate ſumpti repetitione, & (*num.* 8. *prol.*) parem quemlibet binarius metitur; per hoc attributum parem definit Wolfius §. 72. *Arith.*

Def. 11. NUmerus exponens modum, quo quantitas unitatem continet, *integer*, exprimens modum, quo in unitate quantitas continetur, dicitur *fractus*, *mixtus* vero, qui ex integro, & fracto componitur.

ARTI-

ARTICULUS III.

De Comparatione Numerorum,

Def. 12. **M**Odus, quo quantitas una aliam continet, dicitur *multiplicitas*; modus autem, quo quantitas una in alia continetur, *ſubmultiplicitas*.

Cor. 1. **S**I quantitas, quæ in alia continetur, ad inſtar unitatis ſumatur (*num.* 4. *Prol.*) multiplicitas exponetur per numerum integrum, in quo unitas numerans toties repetatur, quoties dicta quantitas in alia continetur (*def.* 11.) Sic ſi longitudo hujus Scholæ bis continet latitudinem, binarius bis unitatem continens longitudinis ſuper latitudinem multiplicitatem exprimet.

Cor. 2. **S**I vero quantitas continens unitatis inſtar conſideretur, [*n.* 4. *Prol.*] modus, quo quantitas in quantitate continetur, per numerum fractum exponetur [*def.* 11.).

Def. 13. **N**Umerus, quo multiplicitas ipſius A ſuper B determinatur, dicitur *exponens* multiplicitatis A ſuper B, & ſubmultiplicitatis B reſpectu A.

Sch. **S***I multiplicitatem* A *ſuper* B *exponat binarius*, A duplum, *ſi ternarius*, triplum *ſi quaternarius*, quadrupulum &c. *dicitur*, *&* B *reſpective* ſubduplum, ſubtriplum, ſubquadruplum &c. *Imo cum ſimplum, quod eſt minus, æquale ſit parti multipli, quod eſt majus*, (n. 8. Prol.) *ſimplum reſpectu multipli vocari etiam ſolet pars dimidia*

midia, tertia, quarta, quinta &c. ſi dictus exponens ſit binarius, ternarius, quaternarius, quinarius &c. quodſi multiplum ita contineat ſimplum aliquoties, ut tamen ſuperſit in illo pars, quæ ſimplum integrum non amplius contineat, ſed ejus ſubmultipla ſit, tota multiplicitas [cor. 1. & 2. def. 12.] *exponetur per numerum ex integro, & fractione compoſitum, hoc eſt per numerum mixtum. Ex quo quatuor multiplicitatis ſpecies numeris mixtis exponuntur, uti apparet ex enumeratione caſuum, quam hic ſubdo. 1. Aut multiplum continet ſimplum ſemel, & unam præterea ipſius partem aliquotam, 2. aut ſemel, & plures ipſius partes aliquotas; 3. aut pluries, & unam, 4. aut denique pluries, & plures partes aliquotas. Multiplum in* 1. *caſu dicitur* ſuperparticularè, *in ſpecie* ſeſquialterum, ſeſquitertium, ſeſquiquartum &c. *ſi pars illa ſit ſimpli dimidia, tertia, quarta &c. in* 3. multiplum ſuperparticulare, *& in ſpecie* duplumſeſquialterum, quadruplum ſeſquiſextum &c. *ſi contineat bis, quater &c., & pars illa ſimpli ſit ſecunda, vel ſexta &c. in* 2. *dicitur* ſuperpartiens, *& quidem ſecundas, tertias, quartas &c. ſi partes illæ ſint ſecundæ, tertiæ, quartæ &c. &* ſuperbipartiens *vel* tripartiens, *vel* quadripartiens, *ſi partes illæ fuerint duæ, tres, quatuor: in* 4. *demum caſu dicitur* multiplum ſuperpartiens *in ſpecie* triplum ſupertripartiens quartas, *ſi ter contineat ſimplum, & tres ejus partes quartas &c.. Quinarius reſpectu quaternarii eſt* ſuperparticulare, *quia continet ſemel ipſum, & unam præterea ejus aliquotam, quartam ſcilicet, proindeque in ſpecie eſt* ſeſ-

C quiqua-

quiquartum; *reſpectu autem ternarii eſt* ſuperpartiens, *quia ipſum ſemel continet, & plures præterea ejuſdem aliquotas, quæ cum ſint numero duæ, & qualitate tertiæ, dicetur* ſuperbi-partiens tertias. *Novenarius reſpectu quaternarii eſt* multiplum ſuperparticulare, *& quidem duplum ſeſquiquartum, quia bis quaternarium, & unam inſuper quartam ejus partem continet; Denarius reſpectu ejuſdem* multiplum ſuperpartiens, *& quidem* duplum ſuperbipartiens quartas, *quia bis continet quatuor, & duas ejus partes quartas. In omnibus his caſibus ſimplum gaudet iiſdem nominibus, quibus multiplum, præmiſſa tamen particula* ſub. *Hæc fuſe proſequutus ſum in gratiam eorum, qui Muſicæ Theoreticæ operam daturi ſunt. His nominibus exponuntur diviſiones Monochordi, quibus ſuæ reſpondent conſonantiæ, vel diſſonantiæ. Sic diviſioni duplæ correſpondet conſonantia, quam* octavam *dicunt, ſeſquialteræ ea, quam dicunt* quintam *&c.*

Def. 14. QUoniam pars aliquota dicitur etiam menſura (*num.* 8. *Prol.*) Quantitates, quarum una eſt aliquota alterius, vel quæ communi aliquota gaudent, dicuntur *commenſurabiles*, ſecus *incommenſurabiles*. Dari hujuſmodi quantitates videbimus in Geometria.

Sch. S*I commenſurabilium illa, quæ alterius aliquota eſt, adhuc aliquotam habeat utrique communem, numerus exprimens primam quantitatem relate ad ſecundam aliquotam tamquam unitatem, erit etiam commenſurabilis numero exprimenti quantitatem ſecundam in ordine ad unitatem eandem* (def. 1. & 14.). *Sin minus, prima nullus*

nullus reſpondebit numerus, ſed ſola unitas, cui unice commenſurabilis erit numerus ſecundo reſpondens. Si communis menſura ipſa aliquotam habeat ſibi, & commenſurabilibus communem, tum ipſi menſuræ, tum quantitatibus commenſurabilibus reſpondebunt numeri, quorum illi, qui commenſurabilibus quantitatibus reſpondent, commenſurabiles erunt ei, qui reſpondet communi menſuræ, & præterea dictæ ſecundæ aliquotæ tamquam unitati. Si vero communis menſura talem aliquotam non habeat, nullus ejdem numerus reſpondere poterit, ſed ſola unitas (def. 1.) *cui unice commenſurabiles erunt numeri quantitatibus commenſurabilibus reſpondentes. In incommenſurarabilibus autem neutri, neutriuſque parti reſpondere poteſt ulla unitas, cui commenſurabiles ſint numeri ipſis incommenſurabilibus reſpondentes, unde nec integri, nec fracti, nec mixti ipſis reſpondere poſſunt* (def. 11.). *Ut id intelligatur, debet fingi exemplum juxta hypotheſes noſtras, eique applicari debent accurate ſingula.*

Def. 15. NUmerus unitati tantum commenſurabilis *primus* in ſe, commenſurabilis alteri numero in ſe *compoſitus* dicitur. Duo numeri ſimul commenſurabiles tantum unitati *inter ſe primi* dicuntur, commenſurabiles alteri numero, vel tales, ut unus ſit menſura alterius *inter ſe compoſiti* ſunt.

Def. 16. NUmerus unitati commenſurabilis *Rationalis*, unitati incommenſurabilis *irrationalis* dicitur.

Sch. E*Xcipies fortaſſe numeros irrationales propriè numeros dici non poſſe, cum*

 de ra-

de ratione generica numeri ſit continere unitatem. Sed obſerva in definitione numeri generaliſſima nos pro unitate ſumere partem quamcumque, ſive ea aliquota ſit, ſive aliquanta. Quantitates incommenſurabiles carent aliquota unitate, ſed non aliquanta. Latus, & diameter quadrati ſunt incommenſurabilia; ſed diameter continet latus pro unitate ſumptum modo determinato, veluti recta qualibet rectam ſui aliquotam determinato continet modo; & ſi latus ſumatur pro binario, vel pro quolibet numero, diameter ſemper determinato modo continet lateris medietatem, vel partem quamcumque lateris pro unitate ſumptam. Cum igitur non minus determinatus ſit modus continendi unitatem aliquantam, quam aliquotam, & determinationes ſecundi modi conſtituant unam numerorum ſpeciem, rationalium *ſcilicet, eodem jure alteram numerorum ſpeciem conſtituent ſecundi modi determinationes. Quodſi numeri irrationales dicuntur ineffabiles, dicuntur in hoc ſenſu, quod rationales, qui unitatem reſpiciunt tamquam aliquotam, velut totum, cujus ipſi ſunt vel aliquota, vel aliquotæ, eorum valorem nequeant attingere. Longe operoſior eſt reductio Wolfiana, in qua deſſudat, in Ontologia Wolfius, irrationalium numerorum ad rationem numeri genericam, & minus fortaſſe felix.*

CAP.

CAP. II.

DE CHARACTERISTICA NUMERORUM

ARTICULUS I.

De Characteriſtica Integrorum.

Def. 17. CHaracteres *primitivos* appello eos, qui numeris ſimplicibus, ſeu articulis primis deſſignandis deſtinantur; tales vero primitivorum combinationes, quæ conſequentes exprimant, dico *derivativos*.

Sch. *ARticulorum diviſio prorſus arbitraria eſt, ſicuti arbitrarius eſt terminus numerandi, poſt quem initium reaſſumitur. Poſſet enim quemadmodum poſt denarium, ita poſt binarium, ut in* Dyadica *Arithmetica, poſt quaternarium, ut in* Tetractica, *vel poſt alium quemlibet numerum numerandi initium reaſſumi, ex quo articuli prodirent diverſi ab iis, qui* decadicæ *proprii ſunt.*

Theorema I. *IN omni ſpecie Arithmetica univerſa numerorum characteriſtica per ſigna primitiva numerorum ſimplicium, & ordinum articulorum abſolui poteſt.*

Demonſtratio. ARticuli cujuslibet ordinis ſunt unitates ordinis primi, cum adjecta aliqua particula ſui ordinis (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9.) ac proinde in ipſis unitates ſe

 habent,

habent, ut genus, & particuia illa, ut differentia: Cum ergo definitio rei completa habeatur, ſi genus, & differentia exprimantur, cujuslibet ordinis ſufficienter definientur articuli omnes, ſi charactere primitivo exponatur qualis ſit articuli unitas, & cujus articuli ſit unitas; ac proinde per hujuſmodi characteres tota numerorum characteriſtica abſolvetur. *Quod erat demonſtrandnm.*

Theor. 2. *ORdo articulorum numeris exponi poteſt.*

Dem. ORdines articulorum a ſe invicem ſolo gradu differunt, (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9. & 10.) cum ergo gradus qualitatum ſit quanritas, & quantitas quælibet numeris exponi poſſit [*cor.* 4. *def.* 1.], omnes igitur arriculorum differentiæ ita numeris exponi poſſunt, ut ipſi ſufficienter agnoſcantur, adeoque, &c. *q. e. d.*

Sch. *SOla attentio ad modum, quo ordines deſcripſimus, aſſenſum vindicat huic propoſitioni; ita enim ji in hujuſmodi deſcriptione ſuperiores evadunt, & quodammodo creſcunt, ſicuti unitatis additione creſcunt numeri. Th. hoc etiam obtinet in omni ſpecie Arithmeticæ.*

Theor. 3. *IN qualibet Arithmeticæ ſpecie, ſi cujuſvis articuli nota ſimplex ita locetur in ſerie, ut ipſam tot notæ præcedant, quot ordines articulus ille ſub ſe continet, numero exponente articuli ordinem opus non erit.*

Dem. SI enim notæ præcedentes numerentur, eo ipſo dignoſcetur, quot articuli datum præcedant [*hyp.*] ut ſi datam notam præcedant tres notæ, ea erit articulus continens ſub ſe

tres

tres primos ordines. Sed hoc ipſo ſufficienter agnoſcitur, cujus ordinis articulum indigitet illa nota, *v. g.* in dato caſu indigitare quartum, addendo ſcilicet unum numero notarum præcedentium [*Sch. præc.*]. Quare numero exponente ordinem articuli per eam notam indigitati opus non erit. *q. e. d.*

Theor. 4. *IN omni ſpecie Arithmeticæ, ſi articulus infimus numeri non ſit articulus infimi, ſeu primi ordinis, ſed alicuius ſuperioris, notam ipſius tot loca vacua præcedere debent, quot articulos ille habet ſub ſe.*

Dem. SI numerantur hujuſmodi loca vacua, eo ipſo numerantur notæ, quæ illum articulum præcedere debent, (*hyp.*) & inde agnoſcitur, cujus ordinis ſit articulus dati numeri infimus, (*Th.* 3.) quare cum in dato numero [*hyp.*] articuli locis illis occupandis apti non habeantur (*Th.* 3.) ea loca vacua relinquenda ſunt *q. e. d.*

Sch. *POſtrema hæc duo Theoremata mirum in modum compendioſam magis, atque ſimpliciorem reddunt numerorum characteriſticam. His enim ſublatis tot exponentibus opus eſſet, quot ſunt numeri cujuſvis articuli* (Th. 2.) *qui ſuperflui evadent ſub his legibus poſtremis. Cæterum loca vacua impleri ſolent nota aliqua non ſignificativa, ſeu ſigno nihili, quod etiam punctorum ope fieri poſſet.*

Theor. 5. *IN omni ſpecie Arithmeticæ, ſi numerus componatur ex articulis interruptis, inter quos ſcilicet alii mediant, inter notas eorum articulorum tot loca vacua deſſignari debent, quot ſunt articuli mediantes.*

Digitized by Google

Dem. DUorum interuptorum articulorum ſuperior ſub ſe continet alium cum ejus inferioribus, & tot inſuper, quot inter ipſum, & inferiorem mediant (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. & 9.) quare cum tot locis promoveri debeat quilibet articulus, quot ſub ſe inferiores habet articulos (*Th.*3.) & loca, quibus occupandis articuli idonei deſunt, vacua deſſignanda ſint [*Th.* 4.] & articulus inferior ante ſe habeat tot loca, quot articulos habet ſub ſe [*Th.* 3.] inter ipſum, & ſuperiorem tot mediabunt loca vacua, quot ſunt articuli mediantes. *q. e. d.*

Theor. 6. *IN omni ſpecie Arithmetica notæ articulorum ejuſdem ordinis eundem obtinent locum; & contra.*

Dem. ARticuli ejuſdem ordinis totidem ordines continent ſub ſe. Jam vero quemlibet articulum tot loca præcedunt, quot ordines ipſe habet ſub ſe (*Th.* 3. 4. 5.) nec ea lex pro ullo articulo diſpenſatur. Igitur notas articulorum ejuſdem ordinis totidem loca præcedunt; unde eundem occupant determinatum locum *q.e.*1.

2. Quot ſunt loca præcedentia, tot præcedunt articulorum ordines, adeoque ſi totidem loca præcedunt, totidem articulos ſub ſe continent illi, quos indicant notæ, quas loca præcedunt. Atqui ji, qui totidem ordines ſub ſe continent, articuli ſunt ejuſdem ordinis (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9.) ergo notæ eundem occupantes locum indigitant notas ejuſdem ordinis. *q. e.* 2.

Theor. 7. *IN omni ſpecie Arithmetica notæ occupantes eundem locum ſunt numeri homogenei.*

Dem.

Digitized by Google

Dem. DEſſignant articulos ejuſdem ordinis (2. *p. Th.* 8.) in quibus ſcilicet numerandis eadem adjicitur particula poſt nomina ſimplicia [*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9.] ſed ea particula [*def. cit.*] indicat quid in eo ordine dicatur unum. Igitur notæ occupantes eumdem locum eamdem habent unitatem, adeoque (*n.* 3. *Prol.*) numeri homogenei ſunt. *q. e. d.*

Sch. H*Aſce leges generaliſſimas Arithmeticæ decadicæ applicabimus. Ea ſiquidem non modo omnium ſimpliciſſima eſt, ſed & commodiſſima. Denarius procul dubio digitorum numerus homines compulit ad reaſſumendum poſt decadem numerandi initium, in quo conſiſtit Arithmetica decadica.*

Problema I. N*Umerum quemlibet conſcribere.*

Reſolutio. CHaracteres primitivos nobis Arabes tradiderunt, qui ſunt 1. *unum*, 2. *duo*, 3. *tria*, 4. *quatuor*, 5. *quinque* 6. *ſex*, 7. *ſeptem*, 8. *octo*; 9 *novem*, 0. *nihil*, *cyphra*, vel *zero*, quæ pro deſſignandis locis vacuis adhibetur. Notandum ob arabicum fortaſſe legendi morem notas in numeris diſtribui procedendo a dextera verſus ſiniſtram. His poſitis.

1. Si numerus conſcribendus fuerit ſimplex, ipſum deſſignabit aliqua ex ſupraſcriptis notis.

2. Si vero ſit compoſitus, obſervetur numerus ſimplex, qui pronunciatur ante particulam indigitantem ordinem articuli, iſque nota propria indicetur, atque ea nota ad ſiniſtram debite promoveatur juxta leges aſſignatas (*Th.* 3. 4. 5.) *dico factum*.

Obiter

Sch. *OBiter hic notandum primo cujuslibet ordinis articulo nullum præfigi numerum ſimplicem, ſed ſubintelligi unitatem. Sic, non dicimus unam decadem, unum centum, unum mille &c. ſed ſimpliciter, decem, centum, mille &c. cæteris vero præmittitur nomen alicujus numeri ſimplicis, vel integrum, vel obtruncatum. Sic dum dicimus duomillia, triamillia &c. nomina binarii & ternarii integra præmittuntur voci millium indicanti nomen articuli, at dum dicimus viginti, triginta &c. eadem nomina mutilata præmittuntur. Cæterum ad prompte conſcribendos numeros memoriæ figi bene debent particulæ ſingulorum ordinum propriæ, ut auditis ipſis ſtatim dignoſcatur, an articuli ſint continui, an diſcreti, & inde, an inter eorum notas ſimplices interponendæ ſint cyphræ, nec ne, & quot interiici debeant, an, & quot poſt notam ultimi articuli dati numeri ponendæ ſint cyphræ.*

Prob. 2. *NUmerum conſcriptum enunciare.*

Reſol. 2. QUæratur in principio reſolutionis præcedentis nomen cujuslibet notæ, & ex loco cujuſvis ordo, cujus articulum illa nota indicat (*Th.* 3. 4. & 5.) atque in *def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9. particula illius ordinis propria. Quodſi nomini ſimplici cujuslibet notæ adiiciatur dicta partcula ordinis propria, numeri conſcripti articuli omnes, ac proinde numerus ipſe debite enunciabitur. *q. e. f.*

Sch. *LIcet numeri ita conſcribantur, ut locus articulorum computetur a dextera verſus ſiniſtram, pronunciantur tamen a ſiniſtra verſus dexte-*

dexteram, incipiendo ſcilicet ab articulis ſuperioribus, & deſinendo in inferioribus. Nota etiam particulam mille, *utut communem tribus articulis, non pronunciari, niſi poſt eorum infimum, & particulam* millio, billio, trillio *&c. utut communes ſex articulis, non enunciari tamen, niſi poſt eorum infimum; hinc præſtat numerum, præſertim ſi ſit prolixus, dividere in claſſes* 1. *trium,* 2. *ſexnotarum, & infimo articulo ſecundarum claſſium ſuperponere ſignum aliquod particulæ adiicendæ, v. g.* 1. *ſi ſit* millio, 2. *ſi* billio, 3. *ſi* trillio *&c. particulam* mille *enunciando ſemper poſt infimum articulum claſſium, ſuper quem nullus index particulæ adiiciendæ habetur. His bene intellectis eſto pronunciandus numerus*

                5   4
32, 047, 954, 380, 630,
    3   2
415, 247, 943, 000, 200, 415, 943, *in quo curavi, ut omnia præcepta locum habeant; ita juxta illa enunciabitur triginta duo millia, quadraginta ſeptem quintilliones, nongenta quinquaginta quatuormillia, tercenti octuaginta quadrilliones, ſexcenta triginta millia quadringenti quindecim trilliones, ducenta quadraginta ſeptem millia nongenti quadraginta tres billiones, ducenti milliones, quadringenta quindecim millia, nongenta quadraginta tria, in quo obſerva tot articulorum nomina omitti, quot loca vacua occurrunt. In nota dextima claſſium, quæ nullum habent indicem ſemper addenda eſt vox* mille, *quod idcirco moneo, quia eam tyrones omittere ſolent.*

Cor. In

Cor. IN Arithmetica decadica nota quælibet uno loco promota ad ſiniſtram acquirit valorem decuplum, promota duobus decuplum decupli, tribus decuplum decupli decupli &c. a ſiniſtra autem ad dexteram procedens obtinet valorem ſubdecuplum toties, quot ſunt loca, quibus promovetur.

ARTICULUS II.

De Characteriſtica numerorum fractorum.

Sch. *QUoniam ſimplum conſideratur ut pars multipli*, [Sch. def. 13.] *& quidem, aliquota, quippe aliquibus vicibus ſumptum præciſe in eo continetur, ſcilicet eum adæquat, ex eodem principio, unde denominatur ſubmultiplicitas ſimpli, petenda eſt denominatio partium aliquotarum. Hinc perinde eſt, ſive dicas ſubtriplum, ſive dicas tertiam partem, niſi quod in ſecundo caſu ſupponitur, aut realis, aut mentalis multipli diviſio ex vi, quam habet nomen partis; non item in primo. Hinc fit, ut ipſe ille numerus gaudeat nomine exponentis in primo caſu, ſed in ſecundo alio nomine, quod explicat ſequens.*

Def. 18. NUmerus, ex quo partes aliquotæ nomen deſſumunt, dicitur *denominator*.

Cor. SImplum unum reſpectu alterius ejuſdem exponentis, & ad idem multiplum relati dici poteſt unum [*n.* 4. *Prol.*] ergo partes aliquotæ ejuſdem totius, & eodem denominatore fruen-

fruentes dici poſſunt unum, & numerari eadem ratione, qua numerantur integra. Sed non item, ſi aut ſint ejuſdem totius, & diverſi nominis, vel vice verſa, vel & diverſi totius, & nominis.

Def. 19. NUmerus partium aliquotarum dicitur *numerator*.

Theor. 8. *CHaracteriſtica fractionis ex duplici numero componi debet.*

Dem. TAlis ea eſſe debet, ut per eam quantitas denotata ſufficienter intelligatur. Iam vero fractio eſt ille numerus, qui unitatem reſpicit, tamquam aliquota, vel aliquotæ (*def.* 3.) cum igitur partium multitudo non niſi per numerum (*def.* 19.) & earumdem denominatio per numerum itidem [*def.* 18.] ſufficienter determinetur, characteriſtica hæc duplici ex numero, numeratore ſcilicet, & denominatore coaleſcere debet *q. e. d.*

Theor. 9. *DEnominator fractionis exponit omnes unius integri aliquotas illius nominis, quod ab ipſo deſſumitur.*

Dem. EXponens multiplicitatis eſt numerus oriens ex repetita unitate toties, quoties ſimplum in multiplo continetur [*ſch. def.* 13.] & ejus omnes unitates reſpondent omnibus ſimplis, quorum ſubmultiplicitas eo exponente exponitur, in multiplo contentis. Sed ſimplum eſt aliquota, multiplum eſt integrum, denominator eſt exponens multiplicitatis (*def.* 19.) igitur denominatoris unitates reſpondent omnibus unius integri aliquotis nominis illius, quod ab ipſo denominatore deſſumitur.

Nume-

Digitized by Google

Cor. 1. NUmerator eſt numerus hujuſmodi aliquotarum per fractionem expoſitarum, (*def.* 19.) conſequenter in fractione numerator, & denominator numeri ſunt ad ejuſdem nominis aliquotam relati, quorum primus numerat quantitatem fractione expoſitam, alter omnes unius integri partes, ſeu ipſum integrum (*e in Prol.*) eadem aliquota pro unitate ſumpta.

Cor. 2. QUantitas numero quolibet numerata dicitur communiter numeri *valor*; unde (*Cor.* 1.) numerator exponit fractionis, & denominator integri valorem per relationem ad unitatem eandem.

Cor. 3. QUanto ergo numerator denominatore major, vel minor, tanto valor fractionis erit major, vel minor valore integri, &, ſi numerator denominatori æqualis fuerit, uni integro fractio æquivalebit.

Def. 20. FRactio integro æqualis, aut integro major dicitur *ſpuria*; *vera*, quæ integro minor.

Sch. *ALiquotæ numerantur eodem modo, quo cæteræ unitates, nec in ipſis numerandis terminus ullus occurrit, ſicuti non occurrit in numerandis cæteris unitatibus, ex quo elucet poſſibilitas fractionum ſpuriarum; quæ tamen ſub fractionum genere continentur, in quo conſulto non determinavi, an partes per fractum expoſitæ pauciores, an plures eſſe debeant partibus integri, ut numeratio aliquotarum, & integrorum eodem modo eſſent indefinitæ.*

Prob. 3.

Digitized by Google

Prob. 3. *F*Ractionem conſcribere, & conſcriptam enunciare.

Reſol. QUoniam fractionis characteriſtica duplici conſtat numero (*Th.* 8.) numeratore ſcilicet, & denominatore, ut alter ab altero probe diſtinguatur, utrique diſtincta, & conſtans ſedes aſſignetur, & [*prob.* 5.] ponatur in ſede numeratoris ſua characteriſtica, ſuaque in ſede denominatoris, quæ [*Cor.* 1. *Th.* 9.] eadem eſt, ac charcteriſtica integrorum. *d. f. q. e.* 1.

2. Numerator enunciatur eodem modo, quo integra, & denominator enunciatur termino adjectivo: quippe hujuſmodi voces rerum qualitatibus, & denominationibus enunciandis a Grammaticis deſtinantur. *d. f. q. e.* 2.

Sch. *SEdes numeratoris a ſede denominatoris diſtinguitur communiter lineola horizontali, numeratorem ſupra, denominatorem infra ſcribendo. Sic tres quintæ ſcribuntur* $\frac{3}{5}$, *& hæc fractio* $\frac{5}{7}$ *enunciatur quinque ſeptimæ.*

Prob. 4. *PArtes integri quomodocumque æqualiter diviſi fractionibus exprimere.*

Reſol. NUmerus omnium partium æqualium, in quas totum integrum dividitur, fractionis denominator eſt (*Th.* 9.) numerus vero partium fractione exponendarum numerator (*Cor.* 1. *Th. cit.*) quibus ſi aſſignetur ſedes juxta *Sch. præc.* *d. f.*

Sch. *HAbes hinc modum exprimendi in fractis varia menſurarum genera Geo-*

metra-

metrarum, variaque genera ponderum, nummorum &c. Decempeda dividitur in decem pedes, ſi ergo numerus aliquis pedum ſit fractione exprimendus, ille numerus erit numerator, denarius autem denominator. Gradus dividitur in 60 minuta; ſi igitur numerus aliquis graduum ſit exponendus fractione, ipſe erit ejus numerator, & 60 erit denominator; libra in duodecim uncias, igitur unciarum numerus v. g. 7 exponetur fractione $\frac{7}{12}$. *Aſſis Romanus in 5 teruntia, tria igitur teruntia æquivalent* $\frac{3}{5}$ *unius aſſis. Obolus Genuenſis in denarios 12, octo ergo Genuenſes denarii æquiualent* $\frac{8}{12}$ *unius oboli.*

Cor. FRactio æquivalet uni integro, ubi numerator æquatur denominatori. Numerus rerum *v. g.* menſurarum, ponderum, nummorum, minutorum &c. ſpeciei inferioris, quas continet ſpecies ſuperior, eſt denominator fractionis, qua ipſa inferiora exponuntur [*ſch. præc.*] Igitur unitatem ſpeciei ſuperioris efficiunt tot unitates inferioris ſpeciei, quot in partes inferioris ſpeciei dividitur ipſa ſpecies ſuperior. Sic decem pedes efficiunt integram libram, ſexaginta minuta integrum gradum &c.

Def. 21. FRactio *decimalis* eſt, cujus denominator eſt primus alicujus ordinis articulus, puta 1, 10, 100 &c. & in genere, ſi fractionis denominator ſit primus alicujus ordinis articulus in quacumque ſpecie Arithmeticæ, a nomine

nomine illius Arithmeticæ fractio nomen deſſumit.

Cor. 1. QUoniam articulus quilibet ſuperioris ordinis decuplus eſt articuli homologi inferioris, primus ſcilicet decuplus primi, ſecundus ſecundi &c. (*cor. prob.* 5.) & denominator partibus per numeratorem expoſitis nomen tribuit *decimarum*, *centeſimarum* &c. ſeu *ſubdecuplarum*, *ſubcentuplarum* &c (*def.* 18.) in fractione decimali aliquotæ à numeratore expoſitæ eodem ordine per ſubdecuplum, ſubdecuplum ſubdecupli &c. deſcendunt, quò denominator per decuplum, decuplum decupli &c. aſcendit.

Cor. 2. IGitur fractio decimalis, cujus denominator ſit articulus inferior, reſpectu alterius, quam denominat proxime ſuperior, ſe habet, ut articulus ſuperior reſpectu inferioris.

Cor. 3. SI numerator fractionis decimalis ad ſiniſtram promoveatur, valorem acquiret decuplum (*cor. prob.* 2.), &, ſi denominator mutetur in articulum ſuperiorem, evadit idem numerator valoris ſubdecupli [*cor.* 2.] decimalis ergo ejuſdem manet valoris, ſi quot locis promovetur ad ſiniſtram numerator, totidem gradibus augeatur ordo articuli, ad quem ſpectat denominator; hinc $\frac{3}{10}$, $\frac{30}{100}$, $\frac{300}{1000}$, &c. ſunt decimales ejuſdem valoris.

Cor. 4. HAbes hinc methodum reducendi fractionem decimalem ad aliam, cujus denominator ſit articulus ſuperioris ordinis cujuſqumque, tot cyphras ſcribendo poſt numeratorem, quot gradibus denominator novus ſu-

perat veterem (*cor.* 3.) *v. g.* $\frac{3}{10}$ reducendæ ſunt ad 100000.as , quoniam ordo ſextus 4. gradibus ſuperat ſecundum , fractio $\frac{3}{10} = \frac{30000}{100000}$

Cor. 5. HInc ex pluribus diverſi nominis decimalbus fieri poteſt una ejuſdem nominis , ſi omnes reducanrur ad denominatorem maximum , [*cor.* 4.] *v. g.* ſint $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{1000}$, $\frac{5}{100000}$, $\frac{8}{100000000}$, quæ reductæ evadent in $\frac{30000000}{100000000}$, $\frac{400000}{100000000}$, $\frac{5000}{100000000}$, $\frac{8}{100000000}$, quodſi in locis vacuis convenientibus numeratoris primi ſubſtituantur notæ ſignificativæ reliquorum, ſalvo earum notarum valore [*Th.* 6.] prodibit unica fractio $\frac{300405008}{100000000}$ omnibus illis æquivalens.

Prob. 4. F*Ractionem decimalem ad formam integri reducere.*

Reſol. QUoniam denominator cujuslibet decimalis conſtanter eſt 1. cum tot cyphris, quot graduum eſt articulus, ad quem pertinet, dempta una, ſi numerator ita conſcribatur, ut numerus locorum ab ejus notis occupatorum ſit idem cum numero cyphrarum, ſeu o adiiciendarum , ipſe denominator , quin conſcribatur, ſufficienter intelligetur , & decimalis integri ſpeciem præſeferet . Si ergo numerator totidem notis conſtet, non alia re opus eſt, niſi ut conſcribatur ſimplex numerator , ſi vero deficiat aliquibus notis, toti-

totidem cyphræ, ſeu o ipſi ad ſiniſtram adiiciantur, & poſt ipſam adhuc una interiecto puncto, quæ deſſignat locum, in quo integra terminantur, & eo ipſo numerum conſcriptum eſſe decimalem ſignificat: ſic $\frac{45}{100000}$ ſcribetur 0. 00045. & 3. + $\frac{4}{1000}$ ſcrbentur 3. 004.

Sch. *SIcuti ex diviſione ordinis cujuslibet propria Arithmeticæ decadicæ decimales, ita ex diviſione alia qualibet alterius ſpeciei Arithmeticæ propria aliæ fractionum ſpecies derivari poſſunt, quarum proprietates ita hactenus demonſtratis affines ſunt, ut iiſdem fere verbis, (mutatis tantum vocibus decupli &c. propriis diviſionis Arithmeticæ decadicæ, quibus decimalium proprietates enunciavimus) demonſtrari poſſint, & earum reductio ad formam integrorum eâdem prorſus regula peragatur. Hoc unice intercedit diſcrimen inter characteriſticam decimalium, & earum, quæ oriuntur ex diviſione ordinis in plures articulos, puta in* 12, *vel in* 60, *quod in his contingit aliquando, ut eodem denominatore afficiantur duæ notæ, quod in decimalibus non contingit. Dari poteſt fractio v. g. ſexageſimalis compoſita ex* $\frac{23}{60}$, & $\frac{54}{3690}$, *quæ characteriſticè expreſſa juxta legem allatam evadet* 0. 2354, *quæ præferre videtur denominatorem quarti gradus in Arithmetica ſexagecupla. Sed huic malo ſufficienter occuritur, ſi notæ affectæ eodem denominatore aliquo intervallo ab affectis altero removeantur. Sic ſi ſcribatur* 0. 23 54 *numerator in duas tantum*

claſſes diviſus apparebit, & denominatorem ſecundi tantum ordinis ſibi vindicabit. Cæterum id ex eo oritur, quod Arithmeticæ ſexagecuplæ numeri omnes ſimplices peculiarem characterem ſimplicem non habeant, ut habere deberent, ſi ea Arithmetica obtineret. Sic ſi character 23 *eſſet* f, *& character* 54 *eſſet* x, *ejus fractionis characteriſtica duabus conſtaret notis* o. f x, *atque ea ſeparatione opus non eſſet, ut nec in decadica.*

CAP III.

DE OPERATIONIBUS

ARITHMETICÆ

ARTICULUS I.

De Operationibus in Genere.

Def. 22. A*Dditio* eſt operatio, qua ex duorum, vel plurium numerorum unitatibus omnibus numerus componitur. Numeri dati dicuntur *addendi*, ſeu *ſummandi*, numerus inventus dicitur *ſumma*, *aggregatum*. Signum additionis eſt +, enunciatur *plus*: ſic $a + b$ enunciatur a plus b, ſignificat b addendam ipſi a.

Cor. I. TOtum partes ſuas omnes ſimul continet, atque iis ſimul ſumptis æquale eſt (*e in Prol.*); ſed aggregatum continet omnes omnium ſummandorum unitates, ſeu (*e in Prol.*) ſummandos ipſos; eſt igitur ſumma totum

tum quoddam ſummandis omnibus ſimul ſumptis æquale.

Cor. 2. SI partes eædem manent, quolibet ordine recenſeantur, totum ſemper manet idem. [*d in Prol.*] Utut igitur diverſimode diſponantur ſummandi iidem, ſumma eorum ſemper eadem eſt [*cor.* 1.] perinde eſt nempe exprimere ſummam *a*, & *b* per + *a* + *b*, ac per + *b* + *a*.

Cor. 3. SI ipſi *a* addatur o, cum o nullam contineat unitatem (*prob.* 1.) ſumma nil aliud continet præter unitates ipſius *a*: unde *a* + o = *a*.

Def. 23. S*Ubtractio* eſt operatio, qua invenitur numerus datorum duorum differentiam numerans. Datorum major dicitur *minuendus*, minor *ſubtrahendus*, qui invenitur *reſiduum*, *exceſſus*, ſeu *differentia*; ſignum ſubtractionis eſt — enunciatur *minus*, vel *ſubtracto*. Sic *a* — *b* enunciatur *a* minus *b*, vel *a* ſubtracto *b*, ſignificat numerum *b* ſubtractum eſſe ex *a*.

Cor. 1. MAjus continet minus, & differentiam [*f in Prol.*] minuendus ergo continet ſubtrahendum cum reſiduo.

Cor. 2. SI minuendus, & ſubtrahendus ſint conſtanter iidem, etiam reſiduum conſtanter idem erit (*e in Prol.*) porro ſubtrahendus eſt, qui ſigno — afficitur, & minuendus, cui ſignum + præfigitur; adeoque ſi eidem quantitati conſtanter ſignum +, & alteri ſignum — conſtanter præfigatur, quocumque tandem ordine quantitates ipſæ conſcribantur, valor formulæ idem conſtanter erit.

Sch. I. *Ex hoc corollario, & ex ſecundo* def. 22. *ſi detur formula terminis quotcumque, & quocumque ſigno affectis conſtans* $+ a + b - c + d + e - f - g$ *&c. ea quocumque modo perturbari poteſt (modo eadem retineantur ſigna) ſalvo ſemper ejuſdem valore*, v. g. $d + e - g + b - f - c + a$ *eumdem habet cum prima valorem*.

Cor. 3. SI ex *a* ſubtrahatur o, differentia erit totus exceſſus ipſius *a* ſuper o, hoc eſt tota ipſa *a* (*n.* 5. *Prol.*) unde $a - o = a$.

Cor. 4. SI ex *a* ſubtrahatur *a*, vel quodlibet aliud quantitati *a* æquivalens, reſiduum erit o (*g in Prol.*), nimirum $a - a = o$.

Cor. 5. SI quantitas $a = b + d$, ſive excedens *b* exceſſu *d*, ex *b* ſubtrahatur, reſiduum erit $b - a$, & ſubſtituendo $b + d$ loco ipſius *a* (*n.* 8. *Pro*l.) $b - a = b - b - d$, ſed $b - b = o$ (*cor.* 4.) igitur reſiduum erit $- d$.

Sch. 2. *SI quantitas affecta ſigno* + *in ſe ipſa ſpectetur ſecluſa alia qualibet, ea concipitur nihilo addita, adeoque poſitiva; ſi vero in ſe conſideratur quantitas affecta ſigno* −, *concipietur ex nihilo ſubducta, adeoque negativa* (num. 5. Prol.) *unde quantitates poſitivæ merito ſigno* + *afficiuntur, negativæ ſigno* − . *Cæterum poſitivæ ſolitariæ nullum præfigi ſolet ſignum, ſicuti nec poſitivæ in initio formulæ conſtitutæ, ſignum autem* − *privativæ præfigi ſemper debet; & ſi quantitas occurrat ſigno nullo affecta, eidem præfixum ſubintelligitur ſignnm* +, *quod unice aliquo in caſu reticeri poteſt, numquam ſignum* − .

Def. 24.

Def. 24. M*Ultiplicatio* eſt operatio, qua ex duobus datis numeris tertius invenitur alterutrum datorum toties repetitum continens, quoties in altero repetitur unitas. Datorum ille, qui repetitur *multiplicandus*, qui modum repetitionis determinat, *multiplicans*, ſeu *multiplicator*, qui invenitur, *factum*, ſeu *productum* vocatur: multiplicator, & multiplicandus dicuntur etiam *factores*. Signum multiplicationis eſt (.) enunciatur *in*: apud plurimos adhiberi etiam ſolet ſignum (x). Sæpe etiam conjunguntur factores nullo interpoſito ſigno; ſic $a \cdot b$ æquivalet $a\,b$, enunciatur a in b, vel $a\,b$, & ſignificat a in b ductum, ſeu per b multiplicatum.

Cor: 1. SI multiplicandus toties repetatur, quoties in multiplicatore repetitur unitas, numerus, qui ita ipſum repetitum continet, erit ſumma tot multiplicandorum, quot unitates continet multiplicans (*def.* 22.), ex quo intelligitur illud arithmeticorum, multiplicationem eſſe compendioſam additionem.

Cor. 2. SI multiplicandus ad inſtar ſimpli conſideretur, factum erit multiplum, & multiplicans exponens multiplicitatis [*def.* 12. & 13.]

Cor. 3. NUmerus quilibet ſemel ſe ipſum continet, ſicuti ſemel ſe continet unitas [*h. in Prol.*] igitur factum ex unitate in numerum quemlibet eſt ipſe numerus. Similiter factum ex numero quolibet in unitatem toties continet unitatem, quoties is numerus eamdem continet; adeoque factum ei numero æquatur (*num.* 8. *Prol.*)

Cor. 4. SI *a* per o multiplicetur, factum toties continebit *a*, quoties o continet unitatem. Atqui (*probl.* 1.) o nihil continet unitatis. Ergo factum ex *a* in o = o. Similter ſi o multiplicetur per *a*, factum toties continebit o, quoties *a* continet unitatem; atqui ex repetitione o quantacumque numerus non prodit [*def.* 1.] ergo ſactum ex o in numerum pariter eſt o.

Def. 25. D*Iviſio* eſt operatio, qua ex duobus numeris tertius invenitur, ita continens unitatem, ut datorum ille, qui dividendus proponitur, continet illum, per quem dividi debet. Datorum primus dicitur *diuidendus*, ſecundus *diviſor*, qui invenitur, *quotus*, ſeu *quotiens*. Signum diviſionis eſt (:) enunciatur *per*, ſic *a* : *b* indicat quotum ex diviſione *a* per *b*, & enunciatur *a* per *b*.

Cor. I. CUm quantitas in alia toties contineatur, quoties ab alia demi debet, ut eam annihilet (*n.* 8. *Prol.*), quotus exponit quoties diviſor ex dividendo ſubtrahi poſſit. Ob hanc rationem diviſio apud Arithmeticos dici etiam ſolet compendioſa ſubtractio,

Cor. 2. SI diviſor ſumatur ut ſimplum, dividendum correſpondet multiplo. & quotus exponenti ſubmultiplicitatis (*def.* 12. & 13.)

Cor. 3. SI idem per ſemet dividatur, cum ſe ipſum non niſi ſemel contineat (*d. in Prol.*) quotus erit 1.

Cor. 4. SI numerus quilibet per unitatem dividatur, quotus & dividendus eodem

dem

Digitized by Google

dem modo unitatem continebunt, adeoque æquales erunt (*n*. 8. *Prol.*)

Cor. 5. QUodſi unitas dividatur per numerum, non unitatem quidem integram una vice continebit quotus, ſed aliqua, ut ita dicam, unius vicis parte, ſicuti ipſa unitas dividenda in dividente numero continetur. Quoniam ergo fractio $\frac{1}{n}$ toties continetur in 1, quoties numerator 1 continetur in *n* (*cor.* 3. *Th.* 9.) ſi *n* ſit numerus dividens, fractio $\frac{1}{n}$ toties continetur in 1, quoties dividenda 1 in *n* dividente continetur, h. è fractio $\frac{1}{n}$ eſt quotus ex 1 per *n*.

Cor. 6. IMo in genere quælibet fractio toties continet 1. vel in 1. continetur, quoties numerator *n* continet denominatorem *d*, vel in eo continetur (*cor.* 3. *Th.* 9.) Quotus ergo ex diviſione numeri cujuslibet per numerum quemlibet exponitur per fractionem, cujus numerator ſit dividendus, denominator autem diviſor.

Sch. I. *HInc ſignum fractionum, & ſignum quoti promiſcue uſurpantur, ita ut fractio* $\frac{a}{b}$ *ſcribatur etiam* a: b, *& vice verſa, ubi id commodum videatur.*

Cor. 7. SI o dividatur per numerum, quotus nihil unitatis continebit, ſicuti o nihil continet numeri (*n*. 5. *Prol.*), adeoque erit o; contra vero ſi numerus dividatur per o, quoniam o infinities repetitus eum numerum num-

quam

quam adæquare poteſt, (*n. cit. Prol.*) ita nec unitas infinities repetita poterit adæquare quotum, qui proinde erit infinitus (*n.* 8. *Prol.*) & fractio $\frac{a}{0}$ erit infiniti valoris (*cor.* 6.)

Cor. Generale. CUm in additione ex unitatibus datorum componatur unicus numerus, ſcilicet ſumma, vnitas quælibet dati neceſſe eſt ex lege numerandi, ut dici poſſit unum reſpectu unitatum cujuslibet alterius dati, & ſummæ ipſius, atque hinc dati, & ſumma ipſa homogenei eſſe debent. In ſubtractione pariter cum minuendus reſpiciatur expreſſe, ut numerus major, ſubtrahendus ut minor (*def.* 23.) & nonniſi homogenea æqualia, vel inæqualia proprie dicantur (*n.* 8. *Prol.*) minuendus, ſubtrahendus, & reſiduus hic pariter homogenei eſſe debent. At in multiplicatione cum datorum unus exprimat quoties inveniendus continere debeat alterum, & illud *quoties* notet relationem ad vices, datorum ergo unus, ut numerans conſideratur, atque ut abſtrahens a quacumque ratione ſpecifica, qua propter neceſſe non eſt, ut ſpecie cum altero conveniat, ſeu ut cum ipſo ſit homogeneus; & cum uterque pro multiplicatore ſumi poſſit, ut infra patebit, uterque numerans eſt, proindeque nec factum factoribus homogeneum eſſe neceſſe eſt. In diviſione pariter, quotus ut numerans expreſſe reſpicitur (*def.* 25.) qui proinde cum datis homogeneus ſit neceſſe non eſt. Imo, ubi infra oſtenderimus dividendum eſſe factum ex diviſore in quotum, conſtabit non requiri quotum diviſori,

aut

Digitized by Google

aut dividendo eſſe homogeneum. Nec excipias factum eſſe ſpeciem ſummæ. Nam hujuſmodi ſumma ex dictis non reſpondet numeratis, ſed numerantibus factorum unitatibus; atque idem dicendum de diviſione. Cæterum dum datos, & inventum in additione dicit eſſe homogeneos Wolfius § 70 *Arith.* propterea quod illi ſunt partes, hic totum, ſufficienter non videtur attingere homogeneitatis rationem, ſiquidem ad rationem totius nec ipſe in Arith. & Ont. nec alij exigunt partes eſſe homogeneas.

Sch. 2. *FIeri quidem poteſt, ut factum non contineat factorum multiplicandum, ſed potius in eo contineatur, cum ſcilicet multiplicator eſt vera fractio, & ut quotus non contineat unitatem, ſed in ipſa potius contineatur, cum nempe diviſor eſt dividendo major, quo ipſo multiplicationis, & diviſionis definitiones exceptioni obnoxiæ videntur. Sed, ſi attendatur ad noſtram numeri notionem, difficultas omnis evaneſcit. Numerus ſcilicet exprimit modum, quo quantitas unitatem continet, qui modus per vices determinatur, & quidem per vices integras, ubi quantitas continet aliquoties unitatem integram, per vicium vero partes, quando quantitas tantum continet ejus partem, aut partes: cum ergo caſus, in quo quantitas unitatis tantum partem, aut partes continet, reſpondeat illi, in quo quantitas in unitate continetur; in noſtra numeri notione voce activa continere etiam ſecundus caſus exponitur, ſicuti caſus primus, totaque differentia pendet a numero numerante vices exponente; ita ut pro-*

ut perinde ſit dicere quotum contineri in unitate, ac dicere quotum continere unitatis partem, aut partes, continere unitatem non integra vice, ſed aliqua parte vicis; & dicere factum contineri in multiplicando perinde ſit, ac dicere ipſum continere multiplicandi partem, vel continere multiplicandum aliqua parte vicis unjus.

Def. 26. FActum ex numero a in ſe ipſum dicitur numeri a *potentia*, ſeu *dignitas ſecunda*, ſeu etiam ejus *quadratum*; factum ex numero a in ejus quadratum dicitur numeri a *dignitas*, vel *potentia tertia*, vel etiam ejus *cubus*, factum ex a in ejus cubum *potentia quarta*, factum ex a in ejus dignitatem quartam *dignitas quinta*, & ſic deinceps. Porro loco ſcribendi aa, vel aaa, vel $aaaa$ &c. ſcribi ſolet a^2, a^3, a^4, &c. atque hi numeri, qui indicant quoties repeti deberet pro dignitate datà numerus a, dicuntur exponentes dignitatum, *v. g.* 2 exponens ſecundæ, 3 exponens tertiæ &c. Numerus a reſpectu dignitatis ſecundæ dicitur *radix ſecunda*, ſeu etiam *quadratica*, *tertia*, vel etiam *cubica* reſpectu tertiæ potentiæ, *quarta* reſpectu quartæ, & ſic porro. Signum radicis eſt $\sqrt{\ }$, exponens vero ipſius eſt idem cum exponente potentiæ, ad quam refertur, nempe 2 quadraticæ, 3 cubicæ: exponens hujuſmodi ſolet locari intra crura ſigni radicalis ad hunc modum $\sqrt[2]{\ }$ $\sqrt[3]{\ }$ $\sqrt[4]{\ }$ $\sqrt[5]{\ }$ &c., & exponens radicis ſecundæ omitti ſolet, ac loco ſcribendi $\sqrt[2]{\ }$ ſcribitur $\sqrt{\ }$.

Sch. Si

Digitized by Google

Sch. *SI numeri polinomii potentia, vel radix exponi debeat, ipſe concluditur intra parentheſes, & ipſi ad ſiniſtram præſgitur ſignum radicale, vel ad dexteram ponitur exponens dignitatis. Sic radix cubica trinomii* $a + 2b - 3c$ *ſcribitur* $\sqrt[3]{}\,(a + 2b - 3c)$, *& dignitas quinta ſcribitur* $(a + 2b - 3c)^5$ *Multi ſcribunt* $\sqrt[3]{\overline{a + 2b - 3c}}$, *&* $\overline{a + 2b - 3c}^{\,5}$. *Obſervandum bene eſt diſcrimen inter numerum, qui præfigitur literis, ac vocari ſolet* coefficiens, *& ipſum exponentem dignitatis. Ille enim ſignificat repetitionem per additionem*, v. g. $5a$ *ſignificat ſummam* a *quinquies repetiti, ſeu* $a + a + a + a + a$; *&* a^5 *ſignificat repetitionem ejuſdem* a *per multiplicationem, ſeu factum* a.a.a.a.a.

Cor. EX *def.* 24. ut radix unitatem continet, ita quadratum radicem, ita cubus quadratum, ita dignitas quælibet ſuperior proxime inferiorem.

ARTICULUS II.

Theoremata in toto Algorithmo neceſſaria.

Th. 10. *SI æqualibus* a, *&* b *addatur idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *vel quod perinde eſt* cor. 2. def. 22. *ſi eidem* c, *vel æqualibus* c, *&* d *addantur* a, *&* b *æqualia, ſummæ erunt æquales*: 2 *Si eidem* c, *vel*

c, *vel æqualibus* c, *&* d *addantur inæqualia* a, *&* b, *vel quod rurſus perinde eſt* (cor. cit.) *ſi inæqualibus* a, *&* b *addatur idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *aggregata erunt inæqualia*.

Dem. 1.° $a + c = a + c$ (*e in Prol.*) ſed loco a ſubſtitui poteſt b (*hyp. & n.* 8. *Prol.*) facta igitur actu ſubſtitutione $a + c = b + c$; porro etiam loco c ſubſtitui poteſt d ob eandem rationem, ergo etiam $a + c = b + d$ & (*cor.* 2. *def.* 22.) $c + a = c + b$, & $c + a = d + b$. *q. e.* 1.

2.° Quoniam ſalva quantitate fieri nequit ſubſtitutio in caſu ſecundo (*n.* 8. *Prol.*) ergo ſummæ in eodem inæquales: (*n. eund.*) *q. e.* 2.

Th. II. SI *fuerit* $a > b$, *erit* $a + c > b + c$, *&* $c + a > c + b$: *Si præterea fuerit* $c = d$, *erit* $a + c > b + d$, *&* $c + a > d + b$, *ſi vero* $c > d$, *erit a fortiori* $a + c > b + d$, *vel* $c + a > d + b$.

Dem. I. Sit d exceſſus ipſius a ſuper b, ita ut $a = b + d$ (*k in Prol.*) erit ergo $a + c = b + d + c$ [*Th.* 10.] ſed $b + d + c > b + c$ (*n. in Prol.*) ergo etiam $a + c > b + c$ (*m in Prol.*) *q. e.* 1.

2. $a + c = c + a$, & $b + c = c + b$ (*cor.* 2. *def.* 22.) ergo (1. *p & m in Prol.*) $c + a > c + b$. *q. e.* 2.

3. Quodſi $c = d$, erit $b + c = b + d$ (*Th.* 10.) ſed $a + c > b + c$ (1. *p.*) ergo $a + c > b + d$ (*m. in Prol.*) *q. e.* 3.

4. Eodem modo, ac in 2. *p.* oſtenditur eſſe $c + a > b + d$ *q. e.* 4.

5. Si

Digitized by Google

5. Si $c > d$, erit $b + c > b + d$ (1. *p.*) ſed $a + c > b + c$ (1. *p.*) ergo a fortiori $a + c > b + d$ (*p. in Prol.*) *q. e.* 5,

6. Et etiam a fortiori eſſe $c + a > d + b$ oſtenditur eodem modo, ac in 2. p. *q, e.* 6.

Cor. $a + c > b + d$ in hyp. th. & (*l in Prol.*) $b + c < a + c$; & ſimili ratione evincam $b + d < a + c$ &c. h. è in ſingulis partibus theor. primo æquationis membro ad ſecundum, & ſecundo ad primum locum translato ſignum $>$ mutari in $<$. Porro $a + c$ ſignificat eandem c additam majori a, & $b + c$ eandem c additam minori b. (*def.* 22.) igitur eo ipſo, quod oſtendimus ſummam primam eſſe majorem ſecunda, ubi majoris, & minori idem addatur, oſtendimus etiam ſummam primam eſſe minorem ſecunda, ubi minori, & majori idem adiiciatur; atque idem cæteris partibus applicari poteſt.

Theor. 12. *IN ſubtractione ſigna ſubtrahendæ mutantur in contraria.*

Dem. SI quantitas ſimplex b ex minuenda quacumque, ſive ſimplici, ſive compoſita a (*def.* 23.) ſubtrahi debeat, reſiduum erit $a - b$, ſi ſubtrahatur compoſita $b + c$ erit facta ſubtractione primæ partis b reſiduum $a - b$, quod conſiderari poteſt ad inſtar ſimplicis quantitatis, quam dico x, ex qua ſi ſubtrahatur c reſiduum erit $x - c$ (*def.* 23.) & ſubſtituendo $a - b$ loco x (*n.* 8. *Prol.*) erit idem reſiduum $a - b - c$. Si ſubtrahenda componatur ex aliis adhuc partibus poſitivis, eodem modo oſtendetur in reſiduo eas affectum iri ſigno $-$, adeoque ſignum

gnum $+$ in ſubtrahenda per ſubtractionem mutari in $-$. Quodſi ſubtrahenda componatur ex parte poſitiva, & negativa, ut $x - z$, ex minuenda a non tota x ſubtrahi debet, ſed tantum exceſſus x ſuper z. [*def.* 23.) Porro x continet z, & hunc exceſſum (*k in Prol.*). Igitur ſi ex a ſubtrahatur x, ex a ſubtrahitur hic exceſſus, qui vere ſubtrahi debet, & præterea z, quæ ſubtrahi non debebat. Ne igitur plus æquo ſubtrahamus, ſubtracto x ex a reſiduo $a - x$ adjici debet z plus æquo ſubtracta, adeoque reſiduum verum eſt $a - x + z$; conſequenter ſignum $-$ in $+$, & $+$ in $-$ in ſubtractione mutari debet *q. e. d.*

Th. 13. *SI ab æqualibus* a *&* b *idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *vel ſi ab eodem* c *æqualia* a, *&* b *ſubtrahantur, reſidua erunt æqualia.*

2.° *Si ab æqualibus* a, *&* b, *vel ab eodem* x *ſubtrahantur inæqualia* c, *&* d, *vel ſi ab inæqualibus* c, *&* d *ſubtrahatur idem* a, *vel æqualia* a, *&* b, *differentiæ erunt inæquales.*

Dem. 1.° $a - c = a - c$ (*e in Prol.*) ſed loco a ſubſtitui poteſt b (*num.* 8. *Prol.*) ergo $a - c = b - c$. Quodſi $c = d$, ſi loco c ſubſtituatur d (*num.* 8. *Prol.*) erit etiam $a - c = b - d$; ſimiliter $c - a = c - a$ (*e in Piol.*) & loco a ſubſtitui poteſt b (*hyp. &* *n.* 8. *Prol.*) ergo $c - a = c - b$.

2.° Quoniam in ſecunda hypotheſi numquam ſubſtituere licet d in locum c, patet. (*n.* 8. *Prol.*) in eadem differentias ſemper fore inæquales.

Digitized by Google

Th. 14. S*I fuerit* a > b, *erit* 1.° a − c > b − c, *quodſi* c = d, *erit etiam* 2.° a − c > b − d. *At* 3.° x − a < x − *b*; *quodſi* x = z, *erit etiam* 4.° x − a < z − b. *Si* c < d, *erit* 5.o *multo magis* a − c > b − d; *& ſi* x < z *erit* 6.° *multo magis* x − a < z − b.

Dem. I. SI exceſſus *a* ſuper *b* ſit *d*, erit *a* = *b* + *d* [*k in Prol.*] unde *a* − *c* = *b* + *d* − *c* [*Th.* 13.] ſed *b* + *d* − *c* > *b* − *c* (*n. in Prol.*) ergo (*o in Prol.*) *a* − *c* > *b* − *c*. *q. e.* 1.

2. *a* − *c* > *b* − *c* [1. *p.*] ſed *b* − *c*. = *b* − *d* (*hyp. & Th.* 13.) ergo (*o in Prol.*) *a* − *c* > *b* − *d*. *q. e.* 2.

3. *x* − *a* = *x* − *b* − *d* (*Th.* 13.) *x* − *d* eſt pars ipſius *x* (*def.* 23.) quæ ſi dicatur *p*, erit *x* − *b* − *d* = *p* − *b*. Porro *x* > *p* (*n. in Prol.*) & (1. *p.*) *x* − *b* > *p* − *b*, adeoque *p* − *b* < *x* − *b* (1. *p.*) ſed *p* − *b* = *x* − *b* − *d* = *x* − *a* (*hyp.*) ergo *x* − *a* < *x* − *b* (*o in Prol.*) *q. e.* 3.

4. Quodſi *x* = *z*, erit (1. *p.Th.*13.) *x* − *b* = *z* − *b*, atque hinc [*o in Prol.*] *x* − *a* (*quæ* < x − b (3. *p.*) < *z* − *b*. *q. e.* 4.

5. *b* − *c* < *b* − *d* (*hyp. &* 1. *p.*) ſed *a* − *c* > *b* − *c* (1. *p.*) ergo (*p. in Prol.*) *a* − *c* > *b* − *d*. *q e.* 5.

6. *z* − *a* < *z* − *b* (*hyp. &* 3. *p.*) ſed (1.*p.*) *x* − *a* < *z* − *a*. ergo (*p. in Prol.*) à fortiori *x* − *a* < *z* − *b*. *q. e.* 6.

Sch. C*Onſulto theoremata identidem enuncio characteriſtice, ut ſtatim aſſueſcatis notio-*

notionibus abſtractis, & ſignificatus caracterum vobis reddatur familiaris. Aſperum videbitur hujuſmodi idioma, ſed experientia ipſa comprobabit eſſe non modo familiari compendioſius, & felicius, ſed etiam clarius, modo ſignis prompte ideas rerum ſignatarum adnectatis. Ea de cauſa utiliſſimum vobis erit, ſi theoremata, quæ enunciamus characteriſticè, in familiare idioma, & ſi, quæ enunciamus familiariter, in idioma characteriſticum traducatis, & vos ipſi mutuo vobis proponatis etiam alias propoſitiones hujus generis, aut familiariter expreſſas, & characteriſtice exprimendas, aut vice verſa.

Th. 15. *QUolibet ordine ſe multiplicent duæ quantitates, idem factum producunt.*

Dem. SIt multiplicanda *a*, multiplicans *b* erit factum [*def.* 24,] *a b*, quod ſi multiplicans fuerit *a*, multiplicanda *b*, idem factum erit *ba* [*def. cit.*] intelligatur porro *b* ſolvi in unitates, factum *a b* toties continebit *a*. 1. quot ſunt unitates ipſius *b*, ſicuti *ba* toties continet eandem; ſed *a* ≕ *a* 1. (*cor.* 3. *def.* 24.) adeoque *b a* toties continet *a*. quoties *a b* continet *a*, quoties ſcilicet *b* continet unitatem. Igitur (*num.* 8. *Prol.*) *b a* ≕ *a b. q. e. d.*

Cor. I. SI quantitates multiplicandæ fuerint *a*, *b*, *c*. duæ quælibet ipſarum *v. g. a*, *b* quocumque ordine multiplicatæ unum, & idem factum producent, adeoque factum ipſum unica litera. *v.g. x*. indigitari poterit. Eſt vero *x c* ≕ *c. x*. (*Th. præc.*) ergo *a b c* ≕ *c a b* & *b a c* ≕ *c b a*

Digitized by Google

$=cba$, facta nimirum ſubſtitutione (*num:* 8. *Prol.*] ſimiliter a, & c quocumque ordine multiplicentur etiam idem factum producunt, quod unica litera z indigitare licet. Eſt vero $bz = zb$ (*Th.præc.*) igitur $acb = bac$ & $cab = bca$; ſimili modo oſtendetur quatuor, quinque &c. quantitates quocumque ordine multiplicatas ſemper idem factum producere.

Cor. 2. CUm multiplicans ſit exponens multiplicitatis facti ſupra multiplicandum [*Cor.* 2. *def.* 24.] & pro multiplicatore haberi poſſit quivis factorum, patet, ſi exponens multiplicitatis ſumatur pro ſimplo, ſimplum evadere exponentem multiplicitatis. Sic 3 exponit multiplicitatem 12 ſuper 4, & vice verſa 4 eiuſdem 12 multiplicitatem ſuper 3.

Th. 16. *IN multiplicatione ſigna eadem efficiunt* $+$, *diverſa* $-$.

Dem. SInt 1.° ambo factores a, & b poſitivi, h. è affecti ſigno $+$. Factum ab toties continet poſitivum a, quoties b continet unitatem. (*def.* 24) adeoque, ſi a in facto pro unitate ſumatur, factum ipſum coaleſcit ex unitatibus poſitivis. Eſt itaque poſitivum, (*n.* 5. *Prol.*) adeoque affectum ſigno $+$. (*ſch.* 2 *def.* 23.) Sit 2.° factor alteruter a negatiuus, & alter b poſitiuus factum ab toties continet factorem negativum a, quoties b continet unitatem [*def.* 24) adeoque, si a ſumatur pro unitate, factum ab coaleſcit ex unitatibus negativis. Eſt igitur [*num.* 5. *Prol.*) factum ab in hoc caſu negatiuum, adeoque afficiendum ſigno $-$ (*ſch. cit.*)

3 Sit denique factor uterque negativus, hoc eſt ſigno — uterque afficiatur, ergo factum $a\,b$ toties continet factorem $-a$, quoties factor $-b$ continet 1. (*def*. 24.) Porro factor $-b$ non continet unitatem poſitivam, ſed potius unitatis negationem, ſeu unitatem negativam [*num*. 5. *Proleg.*] ergo etiam factum non debet continere factorem negativum $-a$, ſed ipſius potius negationem, ſeu factorem poſitivum a, adeoque debet eſſe poſitivum (*num*. 5. *Proleg.*] & affectum ſigno + (*ſch. cit.*)

Sch. *Dictum eſt in demonſtratione in poſitiva quantitate negativam non contineri, & vice verſa, & quidem vere, ac proprie. Quantumlibet enim una repetatur, valorem alterius numquam attingit, imo ab eo ſemper magis removetur. Nihilominus fingitur a mathematicis* 1 *ad* 0 *rationem habere infinitam, ſeu infinities continere, &* 0 *ad* -1 *iterum infinitam rationem habere, unde* 1. *ad* -1 *rationem habet infinities infinitam. Cum vero* (num. 5. Prol.) *non repugnet conſiderare negatiuum ad inſtar poſitivi, & in hoc caſu poſitiuum ad inſtar negativi ſe habeat, etiam* -1 *ad* 1 *habet rationem infinities infinitam conſiderata in* -1 *ratione defectus, cujus conceptus ſenſus eſt, ſicuti poſitiuum infinite ſuperat nihilum, & nihilum infinite ſuperat negatiuum, ita verus defectus infinite ſuperat nihil defectus, & nihil defectus infinite ſuperat negatiuum defectum, nempe quantitatem poſitivam. Ex quo ſequitur* $-$ b *ad* 1 *dicere rationem toties infinities infinitam, quoties* b *continet unitatem, &* ab *ad* $-$ a, *ſeu dividendo antecedens, & conſequens*

ſequens per a , b *ad* — 1 *itidem rationem toties infinities infinitam, quoties* b *continet unitatem, niſi quod in prima ratione, ut termini in aliquo reſpectu* (num. 8. Proleg.) *conveniant*, & *homogenei ſint, habetur ratio negationis, in ſecundo habetur ratio poſitionis. Certe unius ejuſdemque rationis termini opus eſt, ut ſpectentur ſub eodem reſpectu* (num. 8. Prol.) *ut a nobis hic factum eſt, ſed nil vetat quominus termini unjus ſub uno,* & *termini alterius ſub altero ſpectentur; ſic in una ratione termini referri poſſunt ad pretium, in altera ad pondus mercis. Quodſi* n *ſit numerus infinitus*, n^2 *infinities infinitus, erit* n^2 b : 1 *ratio* — b : 1, & n^2 b : 1 *ratio* a b : — a, *adeoq,* — b : 1 ≓ ab : — a ≓ n^2 b : 1 ≓ b : — 1. *Non nulla ex capite IV hic deſſumpſi compendium loquendi facturus, cum tamen non deſint in antecedentibus principia, ex quibus intentum meum oſtendi poſſit. Hæc idcirco monui, ut occurrerem difficultati, quæ contra 3. part. demonſtrationis afferri ſolet. Alijs etiam modis demonſtrare potuiſſem, ut alij omnes Arithmetici, hanc partem, ſed nullum hactenus inveni, qui ex natura multiplicationis flueret, ſicuti præſens noſter; qui ſi alicui difficultati obnoxius eſt, id ipſum incommodum habeo commune cum cæteris, licet cæteri non omnes*, (& ni fallor nemo) *ei difficultati occurrat.*

Cor. SI ſigna utriuſque factoris mutentur in contraria, poſt mutationem manent adhuc eadem, vel diverſa, ſicut ante mutationem, adeoque factum obtinebit idem ſignum, perinde ac ſi mutatio facta non eſſet.

Digitized by Google

Th. 17. *SI factum dividatur per factorum alterutrum, quotus erit factor alter.*

2 Si quotus ducatur in diviſorem, factum erit dividendum.

Dem. 1. FActum *a b* toties continet factorem alterutrum *a*, quoties *b* continet 1 (*def.* 24 & *th.* 15.) ſed ſi factum *a b* ſumatur pro dividendo, & *a* pro diviſore, etiam quotus toties continet 1, quoties *a b* continet *a* (*def.* 25) ergo quotus, & *b* eodem modo unitatem continent, proindeque [*num.* 8. *Prol.*] ſunt æquales *q. e.* 1.

2 Si diviſor ſit *d*, & quotus *c*, factum *c d* toties continet *d*, quoties *c* continet 1 (*def.* 24) ſed etiam dividendum toties continet diviſorem *d*, quoties quotus *c* continet 1. (*def.* 25) igitur factum, & dividendum eodem modo contineat eundem numerum *d*, proindeque [*num*: 8. *Prol.*) æquantur.. *q e.* 2.

Cor. I. DIviſor, & quotus ſe habent ut factores dividendi (2. *p.*) cum igitur, ſi factum dividatur per factorum alterutrum, prodeat alter (1. *p.*) ſicuti ſi dividendum dividatur per diviſorem, prodibit quotus, ita ſi dividendum dividatur per quotum, prodibit diviſor.

Cor. 2. QUoniam factum negatiuum reſpondet factoribus, quorum unus ſit poſitivus, negativus alter (*Th.* 16) igitur sì dividendum fuerit negativum, & diviſor poſitiuus, quotus erit negatiuus, ſi quotus poſitiuus, neceſſario diviſor erit negatiuus, & cum factum poſitiuum

(*Th.*

Digitized by Google

[*Th.* 16) reſpondeat factoribus, aut ſimul poſitivis, aut ſimul negativis, si dividendum fuerit poſitiuum, & diviſor poſitiuus, etiam quotus erit poſitiuus, ſi diviſor negatiuus, etiam quotus erit negatiuus, ſcilicet etiam in diviſione ſigna eadem efficiunt +, diverſa minus.

Cor. 3. ET, si diviſoris, ac dividendi ſigna mutentur in contraria, ſignum quoti erit illud ipſum, quod foret ijs non mutatis

Cor. 4. SI quantitas *a* ducatur in *b*, factum erit *a b* (*def.* 24) quodſi per *b* dividatur, quotus erit *a* (2. *p. Th. præſ.*] conſequenter ſi eadem quantitas multiplicetur, & dividatur per idem, eadem ſemper manet.

Cor. 5. SI factor *a* ducatur in *c*, & factor alter ſit *b*, factum erit *a c b* (*def.* 24) ſeu *a b c* (*Th.* 15] adeoque erit ita multiplum ipſius *a b*, ſicuti *c* eſt multiplum unitatis (*cor. def.* 24] Quodſi præterea factor alter *b* dividatur per *c*, ipſe evadet ita ſubmultiplus, ſicuti *c* eſt multiplum unitatis (*cor.* 2 *def.* 25) & factum ex *a c* in ipſum *b* per *c* diviſum ita erit ſubmultiplum *a b c*, ſicuti *c* eſt multiplum unitatis (*cor.* 2 *def.* 24) igitur si factorum unus multiplicetur, alter dividatur per idem, perinde eſt, ac si factum ipſum per idem multiplicetur, ac dividatur (*def.* 24, & 25) adeoque factum manet idem (*cor.* 4.)

Cor. 6. CUm dividendus *a d* reſpondeat facto, & diviſor *a* factorum uni, quotus *d* alteri, ſi dividendus *a d* ducatur in *c*, & diviſor *a* ducatur pariter in *c*, ſitque *a b c* = *a c b* *Th.* 15) quotus ſemper erit *b* (2. *p. Th. præſ.*)

Digitized by Google

igitur si diviſor, & dividendus per idem c multiplicentur, quotus idem manebit.

Cor. 7. SI diviſor a, & dividendum $a\ b$ dividantur per c, quoti erunt $\frac{a}{c}$, & $\frac{ab}{c}$ (*ſch.* 1. *def.* 25.) ſed ſalvo quoto prodeunte ex diviſione $\frac{ab}{c}$ per $\frac{a}{c}$ poſſumus multiplicare tum $\frac{a}{c}$ diviſorem, tum $\frac{ab}{c}$ dividendum per c (*cor.* 5.) & facta multiplicatione prodit in primo caſu a, in ſecundo $a\ b$ (*per* 2. *p. Th. præſ.*) perinde eſt ergo dividere $\frac{ab}{c}$ per $\frac{a}{c}$, ac $a\ b$ per a, ſcilicet ſi diviſor, & dividendum per idem dividantur, quotus manet idem.

Th. 18. S*I fuerit* a = b, *erit* ac = bc, & ca = cb, &, *ſi* c = d, *erit* ac = bd, & ca = db. 2. *ſi* a > b, *etiam* ac > bc, & ca > cb, &, *ſi* c = d, *erit* ac > bd, & ca > db. 3. &, *a fortiori*, *ſi* c > d, *erit* ac > bd, & ca > db.

Dem. EAdem eſt cum *dem. theor.* 10. & 11. ita ut eas hic tranſcribere liceat mutato tantummodo ſigno additionis in ſignum multiplicationis, & vocibus ſigno additionis reſpondentibus in reſpondentes ſigno multiplicationis.

Cor. 1. SI factores ijdem manent, idem etiam manet factum (1. *p.*) ſed si ſigna factorum mutentur in contraria, ſignum facti non mutatur (*Cor.* 3. *Th.* 15.) ergo si ſigna factorum mutentur in contraria, & factores non mutentur, factum idem eſt, perinde ac si nulla mutatio facta eſſet.

Cor. 2.

Cor. 2. CUm multiplicator ſit exponens multiplicitatis, multiplicandus ſimplum, & factum multiplum [*cor.* 2. *def.* 24.] ergo ſi ſimpla fuerint æqualia, & exponens multiplicitatis idem, vel duo æquales, etiam multipla ſunt æqualia, si idem ſit exponens multiplicitatis, & ſimplorum unum altero maius, etiam multiplum primum erit altero maius; ſi ſimplum primum ſecundo maius, primus exponens ſecundo itidem maior, multiplum primum erit multo maius ſecundo.

Th. 19. S*I fuerit* a = b, *erit* a: c = b: c, *&* c: a = c: b; *ſi praterea* c = d, *erit* a: c = b: d, *&* c: a = d: b. 2. *ſi fuerit* a > b, *erit* a: c > b: c, *ſed* c: a < c: b. *ſi praterea* c = d, *erit* a: c > b: d, *ſed* c: a < d: b. 3. *ſi denique* d > c, *erit a fortiori* a: c > b: d, *ſed etiam a fortiori* c: a < d: b, *& contra*.

Dem. SI leviſſima quavis attentione utaris, etiam Theoremati huic demoſtrationes Theorematum 13. & 14. facili negotio applicabis; ut proinde eas hic repeti ſuperfluum ſit.

Cor. I. EAdem ratione, ac in (*cor.* 1. *th: prae.*) liquet quotum manere eundem, eodemque ſigno affectum, ſi diviſor, & dividendus iidem maneant, licet eorum ſigna mutentur in contraria.

Cor. 2. POrro etiam hic diviſor ſimplo, dividendus multiplo, quotus exponenti reſpondet. Igitur ſi multiplum, & ſimplum in duobus caſibus fuerint eadem, etiam idem erit utrobique exponens ſubmultiplicitatis: ſi multiplum,

Digitized by Google

tiplum, & exponens fuerint eadem, eadem quoque erunt ſimpla, ſeu ſubmultiplicia: &, ſi multiplum unum ſit maius altero, exponens idem, etiam primum ſimplum erit ſecundo maius, ſi multiplum unum altero maius, & ſimplum idem, vel duo æqualia, exponens primus ſecundo erit maior. Contra, ſi multipla duo fuerint æqualia, & ſimplum unum altero maius, exponens primus erit ſecundo minor, ſi exponens primus fuerit altero maior, ſimplum primum erit ſecundo minus. Denique ſi multiplum primum fuerit ſecundo minus, & ſimplum primum ſecundo maius, erit exponens primus multo minor ſecundo, ſi multiplum primum ſecundo minus, & exponens primus ſecundo maior, etiam ſimplum primum multo minus ſecundo.

Habes in præſenti, atque antecedenti corollario exemplum traductionis propoſitionum ab idiomate characteriſtico ad idioma commune, quam in ſcholio Theor: 14. commendauimus.

ARTI-

ARTICULUS III.

De operationibus Arithmeticæ in numeris integris.

Prob. 6. NUmeros ſimplices addere, ſubtrahere, multiplicare, & dividere.

Reſol. 1. PRo additione ex lege numerandi tradita in *def.* 4. 5. 6, 7, 8. 9. notetur numerus ſuperior, quem efficit datorum unus cum unitate, iterum ille, quem efficit inventus cum alja unitate, adhuc ille, quem efficit ſecundo inventus cum unitate, rurſus ille, quem cum alia unitate efficit tertio inventus &c. & hæc operatio toties repetatur, quot ſunt unitates ſecundi ſimplicis dati. Numerus ultimo inventus erit ſumma prìmorum duorum datorum. (*def.* 22) hæc ſumma conſideretur, ut datorum primus, eique adijciatur datorum tertius, nunc invento adijciatur quartus, & ita porro. Quoniam [*hyp.*] dati numeri ſunt ſimplices, qui numerum digitorum excedere nequeunt; commodum eſt unitates adjiciendi deſſignare in digitis manuum, & pro ſingulis vicibus, quibus una unitas additur alteri datorum tamquam fundamento, digitum unum claudere, ubi enim clauſi omnes fuerint, numeri deſſignati in manibus unitates omnes ab invento exhauſtas eſſe certus eris [*e in Prol.*] *q. e. 1. f.*

2. Pro

2. Pro ſubtractione eadem eſt operatio cum hoc tantum diſcrimine, quod in additione ſumendus ſit numerus proxime ſuperior, in ſubtractione vero numerus proxime inferior. Commodum etiam hic eſt unitates ſubtrahendi, qui [*hyp*] ſimplex eſt, deſſignare in digitis manuum. Cæterum minuendum eſſe ſimplicem non eſt neceſſe, atque ita fit *q. e.* 2.

3. Deſcribatur quadratum ABCD, & ejus latera ſingula dividantur in 9. partes æquales, ac puncta diviſionum rectis connectantur: hoc ipſo quadratum totum dividetur in novem ſeries quadratulorum, quarum quælibet 9 quadratulis conſtabit. In quadratulis horinzontalis ſeriei ſupremæ AB ſcribantur a ſiniſtra verſus dexteram numeri ſimplices, & itidem deſcendendo in quadratulis ſeriei ſiniſtimæ verticalis AD. Numerus, qui eſt in primo quadratulo cuiuſcumque ſeriei, addatur ſibimet (1. *p.*), & ſumma ſcribatur in ſecundo quadratulo eiuſdem ſeriei. Huic ſummæ rurſus addatur ille numerus (1. *p.*), & ſumma ſcribatur in tertio quadratulo, atque ita porro, donec omnia ſeriei Iius quadratula impleveris. Simili regula invenies numeros in quadratulis ſerierum reliquarum conſcribendos. Tabula hac methodo deſcripta dicitur Pythagorica, ea multiplicationi, & diviſioni ſimplicium mirum in modum inſervit; ſed antequam ad has operationes eam applicemus, aliquid in ipſa obſervandum eſt.

1. Numerum in quolibet quadratulo conſcriptum, toties continere numerum conſctiptum in primo quadrato ſeriei, quot locis promovetur a ſiniſtra verſus

verſus dexteram illud ipſum quadratulum [1. *p.*)

2. Numeros ſcriptos in fronte Tabulæ indicare quot locis a ſiniſtrâ verſus dexteram promota ſunt ſingula inferiora quadratula (*conſtruct.*) *e.g.* in quadratulo 5.° quartæ ſeriej habetur 20, qai quinquies continent 4 ſcriptum in primo, & in fronte Tabulæ ipſi quadratulo quinto reſpondet 5.

TABULA PYTHAGORICA:

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

D C

4. Numerus ergo cuiuslibet quadratuli toties continet numerum primum ſeriei, ad quam ſpectat, quoties numerus conſcriptus in fronte continet 1. adeoque eſt factum ex numero primo ſercii in nume-

Digitized by Google

numerum in fronte, qui reſpondet illi quadtatulo, (*def*.. 24) proindeque ad multiplicationem ſimplicium non alia re opus eſt, quam ut multiplicandus in ſerie ſiniſtima horizontali, multiplicator in fronte Tabulæ quæratur, noteturque quadratulum, in quo ſeries horizontalis illa ſecat verticalem, in cuius fronte multiplicator habetur; in eo enim leges factum quæſitum.

5.o Si dividendus non excedat numerum ultimum Tabulæ 81, eadem tabula inſervit etiam diviſioni. Quæratur enim in ſerie verticali ſiniſtima diviſor, & in ſerie horizontali diviſori reſpondente dividendus; numerus in fronte Tabulæ huic dividendo reſpondens erit quotus (2. *p. Th.* 17.), quodsi dividendus in ea ſerie non habeatur, ejus loco in ipſa ſerie ſumatur numerus proxime minor ipſo dividendo, & quotus proximus exhibebitur in fronte Tabulæ, ut ſupra. Dico *quotum proximum*, quia exacte reſpondebit ſolum numero in Tabula aſſumpto, & non vero dividendo, cuius exceſſus ſupra numerum aſſumptum in Tabula adhuc dividi debet per eumdem diviſorem, ut habeatur verus quotus; *v. g.* debent dividi 59. per 7. in ſeptima columna horizontali, quæ in primo quadratulo exihibet diviſorem 6, non occurit dividendus 59, & numerus ipſo proxime minor in eadem occurrens eſt 56, cui reſpondent in fronte 8; igitur quotus proximus erit 8, & reſiduum (*exceſſus* 59 *ſupra* 56), erit 3, quo per 7 diviſo, habentur $\frac{3}{7}$ (*cor.* 6. *def.* 25.) quotus ergo accuratus eſt numerus mixtus $8 + \frac{3}{7}$

6. Nume-

6. Numeri etiam indeterminati in *ſimplices*, & *compoſitos* dividuntur; ita ut *compoſiti* dicantur, qui ex partibus conſtant mediantibus ſignis, vel $+$, $-$ coniunctis, *ſimplices*, qui non item; atquè hi quidem dicuntur *monomia*, illi *polinomia*, in ſpecie *binomia*, *trinomia*, *quadrinomia* &c. ſi duabus, tribus, quatuor &c. partibus componantur; in quo ſenſu apparet non dici compoſitos, quia 9 maiores, quemadmodum determinati, ſed quia involuunt plures numeros mediantibus operationibus per ſigna indicatis in unum numerum reducendos. Sic $a + b$ eſt numerus compoſitus ex duobus in unum reducendis mediante additione, $a + b - c$ eſt numerus in unum reducendus mediante ſumma primarum partium a, & b. & ſubtractione tertiæ c ex dicta ſumma; & ſenſus $a + b$ eſt ſumma a, & b, ſenſus $a + b - c$ eſt differentia inter c & ſummam a, & b; hæc omnia manifeſta ſunt ex *def.* 22. & 23. monomiorum igitur, ſeu ſimplicium numerorum indeterminatorum additio fit mediante ſigno $+$, ſubtractio mediante ſigno $-$, multipiicatio coniugendo factores nullo interpoſito ſigno, diviſio interpoſito ſigno (:) inter dividendum, & diviſorem, vel poſito dividendo loco numetatoris, & diviſore loco denominatoris (*cor.* 6. *def.* 25.) vel denique delendo divisorem in dividendo, si ipſum ſit productum factorum, quorum aliquis eadem litera, quo diviſor, indigitetur. Quæ omnia manifeſta ſunt ex *definitionibus* 22, 23, 24, 25, ex (*cor.* 6. *def.* 25. & *ex Th.* 16.) *e.g.* ſumma monomiorum a, b, c, d, e, &c. erit $a + b + c + d + c$ &c. Differentia monomiorum a, & b

erit.

erit $a - b$; factum ex monomiis a, & b erit $a\,b$; & quotus ex a per b, $a:b$, vel $\frac{a}{b}$, ex $a\,b$ per a erit b; atque en tibi methodum operandi in ſimplicibus numeris tum determinatis, tum indeterminatis *q. e. f.*

Prol. 7. *Polinomium reducere ad ſimpliciorem expreſſionem.*

Reſol. Contingit, ut aliquot polinomij partes eadem litera indigitentur, quo in caſu polinomium ipſum reddi poteſt ſimplicius. Duo obſervantur in hoc caſu, nimirum ſignum, quo partes eadem litera deſſignatæ afficiuntur, & an numerus aliquis ipſis præfigatur, an nullus, quo in caſu præfixa intelligitur unitas (*e in Prol.*) ſi igitur partes eadem litera deſignatæ fuerint omnes poſitivæ, vel negativæ omnes, in unam ſummam colliguntur numeri ipſis præfixi (1. *p. prob.* 6.) vel si ji numeri compoſiti fuerint (*prob.* 8.) & huiuſmodi ſumma præfigitur datæ literæ, eaque erit poſitiva in caſu poſitivarum partium, negativa in caſu negativarum; ſi vero partium earundem aliæ fuerint poſitivæ, negativæ aliæ, in unam ſummam colligantur numeri poſitivarum, & negativarum, & horum numerorum minor ex maiore ſubducatur, reſiduumque rurſus illi literæ præfigatur, quod erit poſitiuum, vel negatiuum, sì numerus minuendus fuerit poſitiuus, vel negatiuus: ſic polinomium $2a + b - a + 4a - 3b + 4c - d - c - b + 8a = 13a - 3b + 3c - d$

Dem. Quoniam [*e in Prol.*] quantitas quælibet reſpectu homogeneæ una eſt; igitur quantitas litera indigitata numero præfixo hunc

hunc habet ſenſum, ut littera ſit nomen unitatis, ſeu indigitet quid pro unitate ſumatur, numerus vero eius unitatis repetitionem exprimat. Quamobbrem, eandem ratione. qua in numeris, in iidem quantitabus eſt operandnm. Cæteri actus reſolutionis rationem habent in ſignis polinomii; additur enim, ubi occurrit ſignum +, ſubtrahitur ubi occurit ſignum —, præmititur ſignum + ſummæ, & differentiæ, quando eſt numerus prodiens ex repetitione unitatum poſitivarum, & præfigitur ſignum — ſummæ, ac differentiæ, quando eſt numerus oriens ex repetitione unitatum negativarum.

Sch. *AT etiam adduntur ſibi invicem negativa: ita, ſed adduntur, ut in unum numerum colligantur numeri omnes jis præfixi, & huic numero præfigitur ſignum —, quo ipſo uno ſimul actu ſubtrahuntur, quæ in polinomio propoſito non niſi pluribus actibus ſubtrahebantur. Quod vero, ubi partes eadem litera deſſignatæ partim fuerint poſitivæ, partim negativæ, ſignum minuendæ præſigendum ſit differentiæ, patet ex* (cor. 4. def. 23.) *Quoniam enim minuenda* M *conſtat ex ſubtrahenda* S, *&* *Differentia* D, *ſi minuenda fuerit poſitiva, erit* $M = S + D$, *ſi negativa, erit* $M = - S - D$, (k in Prol.) *Quoniam vero* $S + D - S = D$, *&* $- S - D + S = - D$ (cor; 4. def. 23.) *patet reſiduo ſemper eſſe præfigendum ſignum minuendæ.*

Prob. 8. *NUmeros integros determinatos, & indeterminatos addere.*

Reſol. 1.° DAti numeri determinati, ſeu uulgares ſub ſe invincem conſcriban-

valent. Polinomla ergo adduntur, ſi & ipſa coniungantur mediante ſigno + præfixo primæ cujuſlibet dati polinomii parti, quæ plerumque nullo ſigno afficitur; ſi aliquod polinomium primæ ſuæ parti præfixum habeat ſignum −, tunc nullum ipſi ſignum præfigitur. Nam [*Sch.* 1, *def.* 23.] ſignum + iam præfixum eſt illi parti, quæ prima fuiſſet, niſi polinomium perturbatum fuiſſet, ita ut pars negativa obtineret locum primum in ipſius perturbatione. Cætera vero ſigna, quibus afficiuntur cæteræ dati polinomii partes mutari non debent, ſecus [*def.* 22: *&* 23.] mutaretur illud monomium, cui ipſum polinomium æquivalet; [6 *p. Prob.* 6], & ſumma non datis polinomiis æquivaleret, quod eſt contra (*def.* 12.) *e. g.* Summa polinomiorum $a + b$, $- c + d$, $f - g$, $h - i$ erit $a + b - c + d + f - g + h - i$, & ſumma polinomiorum $2a + 3b$, $4a - 2c$, $- b + a$, $d + bc$, erit $2a + 3b + 4a - 2c - b + a + d + bc = 7a + 2b - 2c + d + bc$ (*prob.* 7.) *d. f. q. e.* 1.

Dem. I. **S**Int in datorum primo unitates V, decades D, centenæ C, millenaria M &c. in ſecundo unitates u, decades d, centenæ c, millenaria m, erit ſumma V + D + C + M + u + d + c + m cu (*6. p. probl.* 6.) ſeu [*Sch.* I. *def.* 23.] V + u + D + d + C + c + M + m, in qua formula unitates unitatibus, decades decadibus, centenæ centenis &c. adduntur ſalvo ſummæ totius valore. Cæterorum actuum ratio allata eſt in ipſa reſolutione. *q. e.* 1.

2. Patet ex def. 22. *q. e.* 2. F 2 *Prob.* 9.

$- x + 9z - 2b - 9c, + 4a - p + d = 6a + b - 13c + 9d - x + 9z - p$ [*prob.*] 6. *d. ſ. q. e.* 2.

Dem. I. Sit minuendus V + D + C + M &c. & ſubtrahendus u + d + c + m &c. poſita denominatione, ut in *prob.* 8 erit (6 *p. prob.* 1] reſiduum V + D + C + M − u − d − c, − m = V − u + D − d + C − c + M − m (*Sch. p,* 2. *def.* 23.] In qua formula ſalvo reſiduo, quod prodit ſubtrahendo ex toto minuendo totum ſubtrahendum, exprimitur ſubtrahi poſſe unitates ex unitatibus, decades ex decadibus &c. cæterorum actuum ratio allata eſt in ipſa reſolutione.

2. Patet ex *def.* 23. & *th.* 12.

Prob. 5. *Numerum integrum per alium integrum multiplicare.*

Reſol. I. Si Numeri dati ſint determinati, ſcribatur ſub multiplicando multiplicator ſecundum ſupra allatam regulam, ducaturque ſub ipſis linea recta. Dextima nota multiplicatoris ducatur in ſingulas multiplicandi notas a dextera verſus ſiniſtram [*p.* 4. *prob.* 5.) factum primum ſcribatur loco omnium dextimo ſub dextima multi- plicandi nota, reliqua verſus ſiniſtram promoveantur eo ordine, quo inveniuntur, transferendo iuxta regulam in *prob.* 8 traditam ex loco dexteriore in ſiniſteriorem pro quacumque decade unitatem. Duc deinde eodem ordine ſecundam multiplicatoris notam in ſingulas notas multiplicandi, & facta partialia eadem regula ſcribito ſub nume-

 ro pri-

Digitized by Google

ro primo loco invento, ita tamen ut factum primum reſpondeat notæ ſecundæ numeri ſuperioris. Eadem lege ducatur tertia nota multiplicatoris in totum multiplicandum, & factum ſcribatur ſub numero ſecundo invento, prima rurſus nota reſpondente ſecundæ notæ numerj ſuperioris; & eodem modo procede in cæteris multiplicatoris notis. Si in alterutro, vel in utroque factore occurrat 1, vel 0, quale factum prodeat, monent *Corol.* 3. & 4. *def.* 24. Denique numeros inventos omnes in unam ſummam colligito, ea erit factum. *q. e.* 1.

2. Si factores fuerint polinomia indeterminata, duc ſingulas partes multiplicatoris in partes omnes multiplicandi (6. *p. prob.* 6.) & factis præfigito ſignum ſecundum regulam traditam in *Th.* 16). quod si literis aliqui præfigantur numeri, ij multiplicentur ſecundum regulam traditam in 1. *p. huius prob.*, & eorum factum præfigatur facto ex literis ipſis. Sit ducendum polinomium $a - 4c + 2d - 8e$ in polinomium $b + 3f - 5g$, erit factum $ab - 4bc + 2bd - 8be + 3af - 12cf + 6df - 24ef - 5ag + 20cg - 10dg + 40eg$.

Dem. UT cum diſtinctione procedam, demoſtrationem divido in duas partes, qnarum in una exponam rationem, cur facta ordine expoſito debeant conſcribi, in altera rationem cæterorum actuum.

Factum ex prima nota multiplicatoris in primam multiplicandi erit ex factoribus ſimplicibus. (*probl.* 1.) adeoque unitates ipſius, quas involuit præter decades, primum a dextris locum merentur

Prob.

Digitized by Google

(*Prob.* 1) factum vero ex prima nota multiplicatoris in ſecundam multiplicandi eſt ex articulo primo in ſecundum (*Prob.* 1.) jamvero unitates articuli ſecundi decades exmprimunt, adeoque factum ex nota prima multiplicatoris in ſecundam multiplicandi continet tot decades, quot unitates continet prima multiplicatoris nota, uno verbo eſt numerus decadum, qui ſecundum locum meretur; ſimili modo oſtendam factum ex prima in tertiam eſſe promovendum ad tertium locum, facto ex prima in quartam deberi locom quartum &c. Porro factum ex ſecunda multiplicatoris nota in primam multiplicandi eodem modo, quo factum ex prima multiplicatoris in ſecundam multiplicandi, eſt numerus decadum: ergo primum factum, quod invenitur ducendo ſecundam notam multiplicatoris in primam multiplicandi, eſt articulus eiuſdem ordinis cum ſecundo facto invento, dum prima nota multiplicatoris ducebatur in multiplicandum [*Th.* 7). Simili modo oſtendam ſecundum factum inventum in ſecunda multiplicatione eſſe homogeneum tertio inuento in prima, tertium quarto, quartum quinto &c. imo etiam primum inventum in tertia eſſe homogeneum ſecundo facto invento in ſecunda, ſecundum tertio, tertium quarto &c. quamobrem cum hæ factorum ſeries in unam ſummam colligi debeant, & articuli eiuſdem ordinis, ſeu numeri homogenei ſub homogeneis ſcribi debeant (*Prob.* 1.) patet eo ordine ſingula facta conſcribenda eſſe, quem in ſolutione aſſignavimus.

Sit multiplicaandum + V + D + C + M, & multiplicator u + d + c, erit factum (2.*p.reſ.hu.*) Vu

F 4 + Dd

+ Dd + Cc + Mm + Vd + Dd + Dc + Cu + Cd + Cc + Mu + Md + Mc = Vu + Du + Cu + Mu + Vd + Dd + Cd + Md + Vc + Dc + Cc + Mc [*Sch.* 1 *def.* 23] eo in qua formula ordine, quem præſcripſimus in reſolutione, unitates multiplicatoris ducuntur in omnes articulos multiplicandi, inde decades multiplicatoris in omnes articulos multiplicandi &c. & facta ſingula in unam ſummam colliguntur. Cæteri actus rationem adnexam habent in ipſa reſolutione.

2. Ratio multiplicationis ſpecioſæ eſt in *def.* 24 *& in Th.* 16. Ad numeros præfixos quod attinet, vide reſolutionem *Pro* 6, ubi demonſtravimus literas numeris affectas eodem modo eſſe numerandas, ſive numeratio fiat per additionem, ſive per aliam quamcumque operationem, eadem lege, qua numeri vulgares

Cor. I. SI multiplicatoris notæ ultimæ ſint o, acta ex o in multiplicandi notas ſive ſignificatiuæ ſint, ſive non, erunt o (*cor.* 6. *def.* 24.) unde tot prodibunt ſeries cyphrarum o, quot cyphras habet in fine multiplicator, (1. *p. reſol. hujus*] & dextima cyphra primæ ſeriei dextimum locum in ſumma, dextima ſecundæ ſecundum locum, dextima tertiæ tertium locum in ſumma, & ſic deinceps occupabit, ac proinde tot loca dextima occupabuntur a cyphris, ſeu o quot o ſunt in fine multiplicatoris. Si igitur multiplicator cyphris aliquot terminetur ſufficiet antecedentes multiplicatoris notas ſignificativas ducere in multiplicandum, & ſummæ factorum ſic inven-

inventorum adjicere tot cyphras, ſeu o, ad dexteram, quot ſunt hujuſmodi cyphræ, ſeu o, in fine multiplicatoris.

Cor. 2. QUod ſi etiam multiplicandus terminetur cyphris, ſeu o, dum primam notam ſignificativam multiplicatoris duces in ſingulas mulpicandi, tot facta prius reperies æqualia o, quot erunt cyphræ in fine multiplicandi, (*cor.* 5. *def.* 24.) adeoque factum ex notis ſignificativis multiplicatoris in multiplicandum tot cyphris, ſeu o terminabitur, quot cyphræ ſeu o terminant multiplicandum. Cui facto cum (*cor.* 1.) ſint præterea adjiciendæ tot aliæ cyphræ, ſeu o, quot ſunt in fine multiplicatoris. ergo ſi factor uterque cyphris terminetur, factum habetur, ſi notæ ante ipſas in utroque multiplicentur, & facto earumdem adijciantur ad dexteram cyphræ factorem utrumque terminantes.

Cor. 3. QUod ſi occurrant cyphræ ſeu o inter notas ſignificativas multiplicatoris, ubi ad earum primam perveneris, orietur cyphrarum ſeries, quarum dextima terminabitur ſub ſecunda nota numeri ſuperioris, &, ubi ſecundam multiplicaveris, orietur alia, cuius nota dextima terminabitur ſub cyphra ſecunda ſeriei antecedentis, idemque continget, ſi aliæ adhuc fuerint in multiplicatore cyphræ, atque ubi poſt ipſas veneris ad ſequentem notam ſignificativam multiplicatoris, primum factum ex ipſa in primam multiplicandi notam ſcribendum erit ſub ſecunda cyphra, ſeu o, ultimæ ſeriei (*ex reſ.* 1. *probl. hujus*] Quoniam igitur hujuſmodi cyphræ, ut ſcribantur

bantur omnes, neceſſe non eſt, niſi quatenus notas ſignificativas promovent ad ſiniſtram [*Th.* 5.] ſi in multiplicatore occurrant cyhpræ, ſeu o inter ejus notas ſignificativas, multiplicatio peragi poterit perinde ac ſi eæ non haberentur, dummodo factum ex prima nota poſt ipſas cyphras non per unicum locum ad ſiniſtram promoveatur, ſed per tot adhuc loca, quot cyphræ ad dexteram illam notam præcedunt.

Sic factum ex 20 in 4 = 80 [*cor.* 1.] ex 20 in 40 = 800 (*cor.* 2.)
& (*cor.* 3.) factum ex 44 in 203 =

$$\begin{array}{r} 44 \\ 203 \\ \hline 132 \\ 88 \\ \hline 8932 \end{array}$$

ubi quidem vides factum ex ſecunda multiplicatoris nota in multiplicandum, ſeriem ſcilicet cyphrarum, quæ mediaret inter 132, & 88, omitti; quia tamen hæc ſeries locum ſibi vindicaret ſub 3. primum, ſub 1. ſecundum, factum 88. primum ſub 1. locum habere debet. Atque hæc quidem numericæ multiplicationis compendium reſpiciunt; compendium ſpecioſæ docet ex Leibnitio ſequens.

Sch. *IN multiplicatione literali non exiguum etiam calculis commodum affert ſæpe ſola multiplicationis indicatio, factoribus polimoniis intra parentheſes incluſis. Sic factum ex* a + b + c + 2 d *in* c + 3 d − f *indicatur per* (a + b + c + 2 d) (c + 3 d − f).

Prob. 11.

Cor. 4. FActum ex $a + b$ in $a + b$, ſeu (*def.* 26) $[a + b]^2 = a^2 + 2ab + b^2$ [*prob. præſ.*) igitur quadratum binomij æquatur ſummæ quadratorum partium, & bis facto ex una parte in aliam. Similiter factum $a + b + c$ in $a + b + c = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ ſeu ſecunda dignitas trinomii æquatur quadratis partium, & duplis factis partium ſingularum in ſingulas. Idem patet in quadrinomijs, quintinomis, & polinomiis quibuslibet,

Cor. 5. FActum ex $(a + b)^2$ in $[a + b]$ ſeu (*def.* 26.) $[a + b]^3 = a^3 + 3a\ b + 3ab^2 + b^3$ (*Prob. præſ. & cor. præc.*) igitur cubus binonij æquatur cubis partium, & triplo factorum ex una qualibet parte in quadratum alterius. Similiter $[a + b + c]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$; ſcilicet cubus trinomii æquatur cubis omnium partium, & triplo factorum ex parte qualibet in quadrata reliquarum, cum bis triplo facti omnium partium.

Prob. II. *NUmerum integrum compoſitum* 1. *per ſimplicem*, 2. *per compoſitum dividere.*

Reſol. I. DIviſor ſimplex ad ſinſtiram ſcribatur, ipſique ad dexteram conſtituatur dividendus, ducta inter ipſos recta, ut ſecernantur Prima nota diviſoris applicetur primæ dividendi(*Prob.* 6) & quotus ſub illa notetur, vel id ſi fieri nequeat, per diviſorem dividatur numerus compoſitus ex prima, & ſecunda nota, quotusque notetur ſub ſecunda nota, inde

inde dividatur tertia nota, quotus ſub tertia ſcribatur, atque ita deinceps. Quodſi occurrat diviſorem in aliqua nota non contineri ſcribatur o, ſi aliqua quoti nota iam præcedat, ſecus loco o ſubſtituuntur duæ lineolæ paralellæ, & diviſor ipſe applicatur numero compoſito ex pærdicta nota, & ſequente dividendi. Si quod occurit in diviſione reſiduum, quoniam unitates in loco ſiniſtro ſunt decades in dextero, notæ ſequenti tot decades adjicies, quot ſunt unitates reſiduæ: quod si hoc reſiduum habeatur in fine diviſionis, ipſum erit numerator fractionis quoto adiungendæ, ut accuratus ſit, eiuſque denominator erit diviſor. (5. *p. Prob.* 6.)

2 Scribantur dividendus, & diviſor ut ſupra ſed ſubtus diviſorem agatur recta, ut ſub ipſa quotus diſtinctim à diviſore notari poſit. Ex dividendo ſecernantur tot notæ ſiniſtimæ, quot notas habet diviſor, earumque dextima puncto, aut ſigno alio quocumque notetur, si eæ notæ efficiant numerum diviſore majorem, ſed si componant numerum diviſore minorem, notetur puncto nota ſequens dividendi. Dividatur in primo caſu prima nota dividendi, per primam diviſoris, ſecunda per ſecundam, tertia per tertiam &c. tranferendo, ut ſupra, ad ſequentem notam decades pro unitatibus reſiduis in nota antecedente, & si quoti poſteriores ſint primo æquales, vel primo maiores, primus ipſe notetur ad ſiniſtram ſub diviſore, si eorum aliquis fuerit primo minor, primus ipſe unitate imminuatur, & quidem tamdiu, quamdiu poſteriores omnes evadant primo æquales, vel maiores, ſcribatur in primo loco ſubtus rectam ſub diviſore ductam,

ctam quotus hic, & quotus hic inventus ducatur in diviſorem, & factum ſubtrahatur ex notis reſectis dividendi. Reſidui ad dexteram appone notam ſequentem dividentis, &, qui inde prodit numerus, dividatur, ut ſupra, quotuſque notetur ad dexteram primi quoti. Reſiduo in hac ſecunda diviſione invento iunge ad dexteram ſequentem aliam dividendi notam, &, operatio repetatur uſque ad ultimam notam dividendi; si contingat diviſorem eſſe majorem numero, compoſito, ex reſiduo, & nora reſpectiva dividendi, loco quoti ſcribatur o, & huic numero, qui erit reſiduum reſpectu o, apponatur ad dexteram ſequens dividendi nota; in caſu ſecundo dividendus eſt numerus compoſitus ex duabus primis dividendi notis per primam notam diviſoris, tertia nota illius per ſecundam huius, & ita porro, cetera prorſus fiunt ut in caſu primo *q. e. 2. f.*

3. Si Polinomium per monomium ſit dividendum quærantur in dividendo partes, quas tamquam factor diviſor ingreditur, & ſingularum diviſio fiat ut in *Prob.* 6; reliqæ partes intra parentheſes claudantur, & inter ipſas, & diviſorem interjiciatur ſignum diviſoris, niſi velis diviſorem ad modum fractionis indicare.

4. Si denique polinomium per polinomium ſit dividendum, diviſio fit fere ut in numeris uulgaribus, nimirum per partem quamlibet diviſoris dividitur pars quæcumque dividendi, ut fit in diviſione ſimplici, quotoque ducto in divſiorem factum ex dividendo ſubducitur, ac deinde in reſiduo eodem modo repetitur diviſio, donec in reſiduo nihil ſuperſit per notam quamlibet diviſoris diviſibile: atque

atque ultimo reſiduo, niſi ſit o, ſubſcribitur diviſor ad inſtar denominatoris: Cum arbitrarius ſit ordo, quo polinomii partes conſcribuntur (*Sch. def.* 23.) ab arbritrio etiam noſtro pendet diviſionis principium ſumere a quacumque diviſoris,& dividendi parte, imo in poteſtate etiam dividentis eſt modo unam, modo aliam diviſoris partem aſſumere pro diviſore, cum id non quoti valorem, ſed tantum ordinem partium ipſius perturbet; quodſi in dividendo non occurrant literæ, quæ habentur in diviſore, diviſio indicatur intra parentheſes clauſo diviſore, & dividendo, & interiecto inter ipſos ſigno diviſionis, quod nonnumquam fit, etiam quando diviſio actu fieri poteſt, at in calculi progreſſu deprænenditur non necceſſaria

Dem. 1.° SInt in dividendo millenaria M centenæ C, decades D, unitates V; in diviſore unitates u erit quotus $= \frac{M + C + D + V}{u}$ $= \frac{M}{u} + \frac{C}{u} + \frac{D}{u} + \frac{V}{u}$ (6. *p. Prol.* 3.) Quod ſi quotus $\frac{M}{u}$ in integris ſit *a*, ſed juſto minor, ſitque reſiduum R, erit quotus accuratus $= a + \frac{R}{u} + \frac{C}{u} + \frac{D}{u} + \frac{V}{u}$. Cum autem R referatur ad articulum ſuperiorem (*hyp.*] cujus unitates ſunt decades articuli inferioris, ſaluo ſuo valore pro vnitatibus R transferri poſſunt totidem decades ad C, atque inde loco dividendi ſimpliciter C, dividi poteſt ſimul R + C. Idem oſtenditur, ſi etiam hic habeatur aliquod reſiduum S &c. adeoque &c. Quod autem quoti

notæ

Digitized by Google

nòtæ ſint articuli ejus ordinis, cujus eſt nota dividendi ipſi reſpondens, ita patet. Quoniam dividendum ſe habet ut factum, diviſor, & quotus ut factores. (2. *p. Th.* 17.), & nota quælibet dividendi habet in ſe valorem, quem habet numerus compoſitus ex ipſa nota, & tot cyphris, quot notæ ipſi ad dexteram jacent (*Th.* 3. *&* 4.), ergo etiam factorum alteruter totidem cyphras ad dexteram exigit pro ſuo integro valore [*cor. prob.* 10.] cum igitur diviſor ſit ſimplex (*hyp.*), ergo eæ cyphræ intelligendæ ſunt conſtituendæ ad dexteram quoti. Quod cum obtineatur promovendo quotum ad locum ſub nota reſpondente dividendi, patet propoſitum.

2. Secunda diviſio quamvis videatur diverſa a prima, tamen intimius perſpecta cum illa penitus coincidit. 1. In prima quidem non fit multiplicatio, & ſubtractio præſcripta in ſecunda, quia reſiduum vel immediate ex Tabula Pythagorica, vel etiam ex multiplicatione memoriter peracta innoteſcit; cæterum reſiduum utrobique quæritur cum hoc unico deſcrimine, quod in prima facilius, quam in ſecunda invenitur. 2. Quotus in prima ſcribitur ſub dividendo, non item in ſecunda, quia hic ſub dividendo ſcribitur reſiduum, ſed illic memoria retinetur. Cæterum tum hic, tum illic promovetur ad ſiniſtram eadem penitus lege, ut poſt notam quamlibet quoti tot adhuc ſcribantur, quot ſuperſunt in dividendo notæ. Nova ergo demonſtratione hujus ſecundæ reſolutionis opus non eſt.

3 & 4 immediate fluunt ex *def.* 25. & 6. *p.*

Prob. 6. *Cor.* 1.

Cor. 1. SI diviſorem & dividendum terminent cyphræ, ſeu o, & omnes diviſoris cyphræ deleantur, ſimulque totidem a dextera verſus ſiniſtram in dividendo, utriuſque articuli per æquales gradus deſcendere intelligentur (*th.* 3. 4.) ſeu numeri reſidui erunt totidem vicibus ſubdecupli diviſoris, & dividendi reſpective [*cor. prob.* 2.) igitur ſi numerus, qui remanet ablatis cyphris ex dividendo, dividatur per eum, qui remanet deletis cyphris in diviſore, quotus manebit idem (*cor. th.* 8.) ſic 10000000 diviſum per 5000000, = 10 : 5 : = 2, & 11000 : 5000 = 11 5 : = 2 $\frac{1}{5}$

Cor. 2. QUodſi dividendum cyphris non terminetur, vel ſi terminetur paucioribus, quam diviſor, tamen loco tot notarum ultimarum dividendi, quot ſunt cyphræ in fine diviſoris licebit ſubſtituere totidem cyphras ſalvo valore notarum antecedentium (*th.* 3. *cor.* 4.) & numero inde prodeunti adijcere notas a cyphris excluſas, ut ſaluus maneat valor totius. Sic hic numerus 34514068 = 34514000 + 968 = 34500000 + 14968 &c. ſi igitur ex dividendo tot notæ reſecentur, quot ſunt cyphræ in fine diviſoris, notæ reſiduæ dividendi dividi poterunt per reſiduas diviſoris, ut in *cor.* 1. ſalvo quoti valore, & ſupererit numerus ſub ſigno + adiectus per totum diviſorem dividendus, ſic ſi dividi debeat numerus 46234 per 200, habebis, 46200 : 200 + 34 : 200 = 462 : 2 + 34 :

200

200 = 231 + $\frac{34}{200}$ Compendij igitur gratia, Si in diviſoris fine occurrant cyphræ, totidem notis ultimis dividendi ſubſcribitur totus diviſor, atque huiuſmodi fractio adijcitur quoto emergenti ex diviſione notarum reſiduarum dividendi per diviſorem ſublatis dictis cyphris.

Sch. *SI in diviſione actuali aliquid ſuperſit, hoc reſiduum denominabitur a ſuo diviſore, a diviſore nempe dato a cyphris expurgato, inde in hoc caſu duæ diverſæ emergunt fractiones, altera ex diviſione actuali, & huius denominator eſt diviſor ſine cyphris, altera ex notis a dividendo reſectis, cuius denominator eſt diviſor cum ſuis cyphris. Sic ſi dividatur* 43528 *per* 8200, *quotus erit* 5 + $\frac{25}{82}$ + $\frac{28}{8200}$ *quæ quomodo in unam reducantur, oſtendetur in cor. ſequenti.*

Cor 3. SI diviſori, & dividendo totidem ad dexteram cyphræ adijciantur, per æquales gradus eorum articuli aſcendere intelligentur [*th.* 3. & 4] adeoque valor quoti manebit idem (*cor.* 6. *th.* 17.); ſi ergo numeratori, & denominatori fractionis adiiciantur totidem cyphræ, ea manebit eiuſdem valoris [*ſch.* 1. *def.* 25.], hinc prima fractio ex ſupradictis in *ſch. præced* mutatur in aliam eiuſdem denominatoris cum ſecunda, ſi denominatori reſtituantur cyphræ a diviſore ablatæ, & totidem numeratori, & cum locum harum cyphrarum obtinere poſſint notæ numeratoris ſecundæ fractionis (*th.* 3.

& 4) quem obtinebant ante diviſionem, utraque fractio reducitur in unam, ſi poſt notas numeratoris primæ ſcribantur notæ numeratoris ſecundæ, iiſque ſubſcribatur integer diviſor. Sic ſuperiores fractiones $\frac{25}{82} + \frac{28}{8200}$ reducuntur in $\frac{2528}{8200}$.

Prob. 12. EXaminare ſingulas Arithmeticæ operationes.

Reſol. 1. ACcurata eſt ſumma, ſi ex ſumma ſubtrahatur datorum unus, ex reſiduo datorum alter, ex reſiduo ſecundo iterum alter uſque ad ultimum, quo ſubtracto nihil remaneat.

2. *Reſiduum*, ſi ſubtrahendæ addatur reſiduum, & ſumma minuendam adæquet.

3. *Factum*, ſi ipſo diviſo per factorum alterutrum, quotus emergens ſit factor alter.

4. *Quotus*, ſi ipſo ducto in diviſorem, factum una cum reſiduo (ſi adfuerit) dividendum adæquet.

Dem. I. MAius continet minus, & differentiam, (*k in prol.*) igitur ſumma continet datorum primum, & reſiduum, & reſiduum primum continet datorum ſecundum cum reſiduo ſecundo, adeoque ſumma primum, & ſecundum datum cum ſecundo reſiduo continet. Porro hoc reſiduum ob eandem rationem continet tertium datum, & reſiduum, adeoque, ſi loco ſecundi reſidui ſubſtituatur tertium cum tertio dato, ſumma continebit primos tres datos cum tertio reſiduo, eodem modo procedendo oſtendam continere datos re-

tos reliquos uſque ad ultimum cum ultimo reſiduum. Ergo, ſi reſiduum ultimum fuerit o, præter datos omnes ſumma nihil ulterius continebit, ſed ipſis præciſe æquabitur, adeoque [*def.* 22) erit vera, & accurata ſumma.

2a *pars Patet ex k in prol. & def.* 23.

3a & 4a *pars manifeſtæ ſunt ex th.* 17.

Sch. 1. *PEr demonſtrationem evincitur intentum obtineri per actus in reſolutione præſcriptos, modo ipſi rite executioni mandentur; per examen autem numerus inventus comparatur cum conditionibus, quas habere ipſum debere aliunde, puta ex præcognitis aliis principiis, vel ex natura propſiti quæſiti manifeſtum eſt, quæ ſi ſalvæ maneant, ipſum propoſito ſatiſfacere iudicatur, atque hinc in operatione actus rite exercitos fuiſſe; ſin minus, errorem in executione actuum reſolutionis eſſe admiſſum infertur: ex quibus facile deduces differentiam inter examen, & demonſtrationem.*

Sch. 2. *MIrabimini fortaſſe, quod cum reliquis Arithmeticis examina per* 9, *&* 7 *non adhibuerim. Sed ea hic exponam breviter, & ex eorum natura rationem deducam, cur præcipuum in ſolutione problematis locum ipſis non dederim.* 1. *ergo additionem examinant ſubducendo ex ſingulis datis* 9, *vel* 7 *notantes reſiduum poſt ſubtractionem abſolutam; & ſubducendo dein* 9, *vel* 7 *ex ſumma, notandoque rurſus reſiduum, quod ſi cum primo reſpective identificetur, inferunt additionis rectitudinem, ſin minus eiuſdem falſitatem. Dum porro ſubducunt novena-*

rium loci notarum rationem non habent, ſed eas ſpectant, ut articulos primos, ſed dum ſubducunt ſeptenarium notam ſiniſteriorem, ut articulum ſecundum, dexteriorem ut primum ſemper ſumunt, quemcumque tandem occupent locum. Sic in numero 875, *dum ſubducitur* 9 *ex* 87, *ſummantur ipſæ notæ, & ex ſumma* 15 *ſubducitur* 9 *manente reſiduo* 6, *quod cum* 5 *nota ſequente efficit* 65. *quarum notarum ſumma eſt* 11, *de qua ſubducto* 9, *remanet* 2. *At dum ſubducitur* 7 *diverſa proceditur ratione.* 1 *quæ remanet, ſubducto* 7 *ex* 8, *conſideratur ut* 10, *qui cum ſequente nota* 7 *efficit* 17, *ex quo ſubducto* 7 *remanet* 3, *qui cum* 5 *efficit* 35, *& ſubducto* 7 *remanet* 0. *Antequam ulterius progredior, obſervo errorem nobis poſſe excidere in ipſo etiam examine faciendo: ab hoc quidem periculo immune non eſt examen noſtrum additionis, ſed examina* 9, *&* 7 *tanto ei obnoxia magis ſunt, quanto operatio, quæ in his, præſertim in ſecundo præſcribitur, aſperior eſt ſimplici ſubtractione, & licet verum ſit ex proprietate* 9 *idem reſiduum haberi, ſive notæ ſpectentur ad inſtar ſimplicium numerorum, ſive ut articuli eius ordinis, qui convenit eorum locis, reſiduum idem haberi in eductione* 7 *licet etiam verum ſit; ſi exacte, & caute ineantur huiuſmodi examina, nondum tamen tutus es de ſummæ rectitudine. Si enim notas omnes ſummæ contrario modo ſcribas, vel earum ordinem perturbes, vel ad dexteram, vel in medio quotcumque adjicias, vel deleas cyphras, ſeu* 0, *certe numerus inde diverſus prodibit* (prob 1.), *& tamen examen novenarij eodem modo procedet,*

procedet, ac ante huiuſmodi perturbationem, vel cyphrarum adiectionem, proinde examen errorem minime manifeſtabit. Nec deſunt caſus in quibus 7 eductio errorem haud detegit; ut unum vel alterum afferam captu facillimum, finge alicubi ſubducto 7 nihil remanere, inter notam ex qua ſubductio facta eſt, & ſequentem interijce quotuis 7, vel quamtumvis 7 multiplum, vel quotuis 0, examen eodem modo procedet, ac ante interiectionem: ad ſiniſtram ſumma adijce quotuis 7, vel ejus multiplos, idem continget. Igitur huiuſmodi examina etiam recte inita tuta non ſunt, quo defectu noſtrum minime laborat. Præterea horum examinum demonſtratio ardua, atque operoſa admodum. Neque enim ſatis eſt innuere eam pendere ex axi: 3. lib. 1. Eucl: Nam licet 9, vel 7, qui ſubducitur ex datis ſit æqualis 9, vel 7 ſubducto ex ſumma, nondum tamen certum eſt, an utrimque, ſubducta fuerint æqualia: veſtrum quilibet rogaret an totidem vicibus 9, vel 7 fuerint utrinque ſubducti, præſertim cum apparenter totidem vicibus utrinque ſubtrahi non videantur, ſed potius pluries ex datis, quam ex ſumma. Certe ſi ſufficiens ſignum eſt æqualitatis duorum, quod ſubductis æqualibus ex ipſis remanent æqualia, nec opus eſt, ut ea ſubtrahantur totidem vicibus, etiam 1 = 1, & ſubducta 1 ex inæqualibus quantumcumque numeris, ſemper remanet 0, quod indicio erit numeros quantumlibet inæquales æquari, quod eſt abſurdum. Sed defectum hunc huius demonſtrationis ſupplet ex aliqua parte Wolfius, examen ipſum pauliſper immutans. Notat nempe

Digitized by Google

quot unitates ex columna qualibet in ſequentem tranſlatæ ſint, eaſque (recte quidem, ſiquidem pro quacumque decade ſcribens unitatem numerum 9 omittis) conſiderat, ut novenarios inter ſummandum omiſſos iiſque adnumerat numerum novenariorum, a ſumma reiectorum, cui ſi æquatur numerus eorumdem reiectorum ex ſumma, & reſiduum ſit idem, infert veram eſſe ſummam. Quæ quidem operatio videtur ita per allatum principium demonſtrari poſſe, ut noſtræ exceptioni non ſit locus. Sed ſi intimius remſcrutemini, ea viget adhuc. In hoc enim examine totidem rejectos utrinque novenarios fuiſſe non conſtat. Neque enim tot omittuntur novenarii inter ſummandum, quot unitates adnumerantur columnis ad ſiniſtram, ſed id verum eſt tantummodo in columna dextima, & in ſubſequentibus omittuntur potius toties decem, centum, mille &c. novenarii. Si ergo ipſum Wolfianum examen perficere volveris, vides quam operoſam, & periculoſam magis operationem ſemper requirat. Iiſdem penitus difficultatibus obnoxium eſt examen 7, & alijs adhuc majoribus, quas ne longior ſim, omitto. Quamobrem ijs merito noſtrum antefertur. Alijs adhuc diverſis modis efficiunt arithmetici datorum ſubtractionem, quos hic recenſere omnes ſuperfluum puto.

Cæteras etiam operationes per ſubductionem 9, & 7 examinant, ſubtractionem, educendo 1. ex ſubtrahendo, & reſiduo, ſecundo ex minuendo, 9, vel 7, & obſervando an idem habeatur reſiduum, nec ne: multiplicationem demendo. 1. ex multiplicando 2. ex multiplicante 3. ex facto

reſidui

reſidui primi in ſecundum, 4., ex ipſo facto 9, vel 7, & obſervando an in 3. & 4. eductione idem remaneat, nec ne. Diviſionem demendo 1. ex diviſore. 2. ex quoto, 3. ex facto reſidui primi in ſecundum, 4. ex dividendo 9, vel 7, & obſervando an in 3. & 4. ſubductione idem remaneat. Ad ſubtractionem quod attinet, ejus examen coincidit cum examine additionis, ita ut minuendus numerus ſpectetur ad inſtar ſummæ, ſubtrahendus, & differentia ad inſtar datorum, proindeque de hoc examine eadem redeunt affirmanda, quæ de examine ſummæ. Quod vero ſpectat ad reliquas operationes rem tentanti apparebit præter ſupradicta in examine ſummæ errandi pericula, nova adhuc occurrere, & difficultatem ſupra allatam contra demonſtrationem examinis ſummæ vigere melius in demonſtratione iſtorum. Quæ cum ita ſint, merito huiuſmodi examinum methodis in prob. locum denegavimus.

Sch. 3. I*Nter operationes Arithmeticæ recenſetur etiam radicum extractio, quæ quidem ab hactenus expoſitis diverſa non eſt, ſed potius ipſarum complexus. Eam hic exponemus, ſed ultra tertiam potentiam non progrediemur, ſuperioribus locum in Arith. ſublimiori relinquentes, in qua canonem deſcribemus, extractioni radicum omnium, & elevationi ad potentias quaslibet ſive determinatas, ſive indeterminatas deſcribemus. Elevatio numeri ad ſecundam, vel tertiam, imo & ad aliam quamlibet, in ipſa definitione 26. deſcribitur, & per regulas in* probl. 10. *traditas facile percipitur; ut proinde diſtincto problemate pro eadem hic opus non ſit. Ad ex-*

tractionem vero ſecundæ, & tertiæ radicis accedere non poſſum, niſi paucis prænotatis, quorum neglectus in cauſa eſt, ut a demonſtrationibus horum problematum ipſius Wolfii, qui de rigore geometrico adeo ſe præbet ubique ſollicitum, animo plene convicto, & illuſtrato non diſcedas. Mens erat quidem mihi hæc proſſequi nova theoria (quemadmodum ob ſimilem cauſam feci in characteriſtica numerorum) ſed melius, opinor, mentes ſubibunt, ſi ſoluta proponantur, ut in ſequenti.

Cor. Gen. A. EX *Probl.* 1. numerus conſtans duabus notis ſolvi poteſt in binomium, cujus prima pars ſit prima nota cum una o, & nota ſecunda ſit pars altera. Sic 24 = 20 + 4. Compoſitus ex tribus in trinomium, cujus pars prima ſit nota prima cum duabus oo, pars altera nota ſecunda cum una o, pars ultima nota tertia. Sic 235 = 200 + 30 + 5. Compoſitus ex quatuor notis in quadrinomium &c.

B. Quadratum primæ partis binomii hujuſmodi eſt numerus compoſitus ex quadrato partis ſignificativæ, quæ (A) ſimplex numerus eſt, cum duabus ad dexteram oo [*cor.* 2. *probl.* 10.] proindeque, cum illud quadratum notæ ſignificativæ duabus ad ſummum notis conſtare poſſit, & ad minimum una, totum quadratum primæ, partis (*cor.* 2 *probl.* 10.) quatuor ad ſummum notis conſtabit, tribus ad minimum, & quadratum notæ ſignificativæ terminabitur in loco antepenultimo. Obſerva quadratum 50, quod eſt 2500, vel aliud quodlibet, & hæc omnia palpabis.

C. Prima binomii pars ad ſummum eſſe poteſt

teſt 90 [A], cujus duplum 180 ad ſummum poteſt eſſe numerus trium notarum, quarum ultima neceſſario eſt 0 (*cor.* 1. *probl.* 10.) notæ vero ipſam præcedentes exprimunt duplum notæ ſignificativæ primæ partis binomii, adeoque factum ex ſecunda binomii parte in duplum notæ ſignificativæ primæ partis binomii terminatur in penultimo loco. Porro binomium omnium maximum (A) eſt 90 + 9, in quo quadratum primæ partis eſt 8100, & bis factum ex ſecunda in primam eſt 1620, quadratum vero partis ſecundæ 81; quorum ſumma 9801 quatuor tantum notis conſtabit, ut proinde verendum non ſit, ne ullius binomii quadratum pluribus, quam quatuor notis, conſtet.

D. Similiter quadratum notæ ſignificativæ primæ partis trinomii quatuor poſt ſe notas habebit, ſeu quatuor locis a dextera ad ſiniſtram promovebitur, bis factum ex ſecunda in primam terminabitur in tertio ante notam ultimam loco, quadratum notæ ſignificativæ ſecundæ partis in ſecundo ante ultimum loco, factum ex tertia trinomii parte in duplum notæ ſignificativæ primæ partis in eodem ſecundo ante ultimum loco, factum ex tertia parte in notam ſignificativam ſecundæ partis in loco penultimo, quadratum tertiæ in ultimo, & totius trinomii quadratum ſex ad ſummum notis conſtabit. Quæ omnia manifeſtiſſima evadent recolenti principia citata in B, & C; imo ex iiſdem facile tu ipſe deduces, ubi nam terminentur facta partialia in quadrinomio, quintinomio, & polinomio quocumque.

E. Ex iiſdem etiam intelliges cubum binomii

ſex ad

ſex ad ſummum notis conſtare, cubum notæ ſignificativæ primæ partis terminari in tertio ante notam ultimam loco, triplum facti ex quadrato notæ ſignificativæ primæ partis in ſecundam terminari in ſecundo, triplum facti ex quadrato ſecundæ in notam ſignificativam primæ in primo ante ultimam loco, & cubum ſecundæ in ipſo ultimo loco terminari. Ex iiſdem facile agnoſces, quibus in locis terminentur facta partialia componentia cubum trinomii, quadrinomii, & polinomii cuiuſcumque.

F. Igitur in quadrato binomii duabus ad dexteram reſectis notis, certus eris in proxima ad ſiniſtram nota terminari quadratum notæ ſignificativæ primæ partis, in quadrato trimonij, quatuor reſectis, in quadrato quadrinomii reſectis ſex, & ſic deinceps. Præterea ſi ex quatuor reſectis in quadrato trinomii duæ iterum reſecentur, certus eris in nota ante has bis factum ex nota ſignificativa ſecundæ partis in ſignificativam primæ, & quadratum notæ ſignificativæ ſecundæ partis terminari; atque ita ſex illæ notæ reſectæ in quadrato quadrinomii ob eandem rationem in tres claſſes duarum notarum dividentur, & ita porro; ex B, C, & D.

G. In cubo autem binomii tres ad dexteram notæ ob eandem rationem ſecandæ ſunt, ſex in cubo trinomii in duas claſſes trium dividendæ, in cubo quadrinomii novem dividendæ in tres claſſes trium, & ſic porro; ex E.

H. Numerus ergo omnis radicem habet ſecundam, aut tertiam tot notis conſtantem, quot continet periodos diviſus juxta F, aut G; quarum prima in diviſione juxta F poteſt quidem paucio-
res,

ciores, ſed non plures continere notas, quam duas, in diviſione vero iuxta G pauciores, ſed non plures, quam tres ex C, D, & E.

I. Ut cæteræ operationes, ita extractio radicum fieri nequit, niſi, qua ratione in numeris ſimplicibus ea fiat, prius innoteſcat. Qamobrem Tabulam ſequentem conſtruimus. Conſtrue rectangulum A B C D, cuius latus A B divide in 9. partes, & latus A D in 3; ductiſque per puncta diviſionum rectis ſcribe in ſerie quadratulorum A B numeros ſimplices, in quadratulo infra 1. ſcribe factum ex 1. 1.; in quadratulo infra 2 factum ex 2. 2 &c. in infimo quadratulo ſub 1. factum ex 1. 1. ſub 2 factum ex 4. 2. &c. quæ facta per prob. 10 invenies. *Ex def.* 26 in ſecunda ſerie habebis quadrata numerorum in fronte Tabulæ, & in tertia cubos eorundem.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	8	27	64	125	216	343	512	729

D C

K. Factum ex multiplicatore quolibet in quodlibet multiplicandum conſiderari poteſt ut ſumma fa-

ma factorum ex multiplicatore in ultimam notam multiplicandi, & ex multiplicatore in reliquas notas, ita tamen, ut unitates huius addantur decadibus illius, decades centenis &c. Patet ex *prob.* 10. demoſtratione. Sic 55. 5 = 25 + 250, in quibus addendis adinvenies notas ſecundi facti ex 5. 5 ita addi notis primi, ut unitates ſecundi reſpondeant decadibus primi &c.

Prob. 13. EX *numero quolibet radicem quadratam extrahere*

Reſol. 1. NUmerum propoſitum divide in periodos duarum notarum (*K in cor gen.*) procedendo a dextera verſus ſiniſtram. 2. Quæratur in tabula radix ſecunda primi membri: eaque poſt lunulam ſcribatur ad ſiniſtram numeri dati, atque hæc erit prima nota radicis quæſitæ. Quodſi in tabula non reperias præciſe numerum primi membri, ſume in ea radicem numeri proxime minoris. Radicis huius quadratum ſubtrahatur ex primo membro. 3. Numerus compoſitus ex reſiduo, & nota prima ſecundæ periodi dividatur per duplum radicis inventæ, & quotus ſcribatur poſt lunulam ad dexteram primæ notæ, & multiplicetur per numerum compoſitum ex diviſore, & ipſo, factumque ſubtrahatur a numero compoſito ex primo reſiduo, & tota ſecunda periodo. Quodſi factum fuerit dicto minuendo maius, quotus unitate tandiu mulctetur, donec idem factum evadat minuendo minus. Per duplum totius radicis inventæ iterum dividatur numerus compoſitus ex reſiduo ſecundo, & prima nota claſſis

tertiæ,

Digitized by Google

tertiæ, & operatio *num.* 3. prorſus eadem iteretur uſque ad claſſem ultimam *d. f.*

Sit *v. g.* educenda radix ſecunda ex numero 9916201. Ecce tibi calculi typum.

```
3149)              9,91,62,01
              61)  61
30-------------1)
                   ----
             624)  3062
               4)  2496
                    566
                   -----
            6289)  5660,1
               9)  56601
                   -----
                   00000
```

Dem. EX H *in cor: gen.* radix quæſita eſt polinomium tot partibus conſtans, quot ſunt periodi numeri propoſiti, & in ultima nota ſiniſtimæ periodi ex F *in cor: cit.* terminatur quadratum notæ ſignificativæ primæ partis huius polinomji: ergo ſi ex tabula ſumatur jllius quadrati radix ſecunda, hic numerus erit nota ſignificativa primæ partis, & huic intelligentur adhærere tot ad dexteram cyphræ, quot ſuperſunt in numero propoſito periodi; ſic in noſtro caſu radix erit quadrinomia, quadratum notæ ſignificativæ terminabitur in 9, ejus radix erit 3, & huius 3. erit valor 3000. ex A *in cor. cit.* in prima nota claſſis ſequentis terminatur factum ex duplo notæ primæ ſignificativæ in ſecundam, quod factum proinde continetur in numero compoſito ex reſiduo claſ-

ſis

ſis primæ, ſubducto ex ea quadrato primæ partis, & nota prima claſſis ſecundæ. Ergo ſi hic numerus dividatur per duplum notæ primæ, quotus (*p.* 1. *th* 17.] erit nota ſecunda, cui *ex A in cor. cit.* intelligentur adhærere tot 0, quot remanent in numero propoſito periodi; ſic in noſtro exemplo, in quo nullum eſt ex prima claſſe reſiduum, in ſecundo 9 terminabitur factum ex duplo primæ notæ 3 in ſecundam, quæ facta diviſione invenietur eſſe 1. cuius valor erit 100. porro in ſecunda nota claſſis ſecundæ (*F in cor. cit.*) terminatur quadratum notæ ſignificativæ ſecundæ partis, adeoque in numero compoſito ex reſiduo primæ claſſis, & claſſe ſecunda continetur factum ex ſecunda nota in ſe ipſam, & ex ſecunda in duplum primæ, ſeu ex *K in cor. cit.* factum ex ſecunda nota in numerum compoſitum ex duplo primæ, & ſecunda, *v. g.* in noſtro caſu factum ex 1. in 61. Subtracto igitur hoc facto ex dicto numero compoſito; in numero compoſito ex reſiduo mox invento, & nota prima claſſis tertiæ continebitur factum ex duplo tum primæ, tum ſecundæ notæ in tertiam, ſeu factum ex duplo numeri compoſiti ex prima, & ſecunda nota in tertiam ex *K. in cor. cit.* quæ proinde ut inveniatur, debet iterum fieri diviſio, ut in reſolutione præcipitur [*p.* 1. *th*: 17.) ſimili modo oſtendam iuxta ea, quæ fiunt in reſolutione inueniri quartam, quintam &c. radicis notam. Porro 3000 + 100 + 40 + 9 ex A *in cor. cit.* = 9149. Itaque omiſſis 0, quæ poſt notas ſubintelliguntur, nume-

numerus compoſitus ex notis inventis eo ordine, quo inveniuntur, æquatur polinomio, quod ſi in ſe ipſum duceretur, produceret numerum æqualem propoſito (*cor.* 4. *prob.* 10.) Eſt ergo ille numerus radix ſecunda (*def.* 26.) numeri propoſiti *q. e. d.*

Sch. *EXtractio radicis ſecundæ ex polinomio literali eadem omnino regula fit, ac extractio ex polinomio numerico, niſi quod multiplicationes, diviſiones, cæteraque operationes hic ſunt ſpecioſæ, ibi vulgares. Sic* $\sqrt{}$ $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ *eſt* $a + b + c$. *En typum calculi*

$$
\begin{array}{l|l}
a+b+c & a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b & 0+2ab+b^2 \\
b & 2ab+b^2 \\
\hline
2a+2b+c & 0+2ac+2bc+c^2 \\
c & 2ac+2bc+c^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Prob. 14. *EX numero quolibet compoſito radicem cubicam extrahere.*

Reſol. 1. NUmerus datus a dextera verſus ſiniſtram procedendo dividatur in claſſes trium notarum. 2. Sumatur ex tabula radix tertia primæ claſſis, aut numeri proxime minoris numero primæ claſſis; quæ radix erit prima nota ſignificativa radicis quæſitæ, ejuſque

que cubus ſubtrahatur ex ipſa prima claſſe. 2. Numerus compoſitus ex reſiduo mox invento, & nota prima claſſis ſequentis dividatur per triplum quadrati notæ inventæ, & quotus erit nota ſecunda radicis quæſitæ. Ducatur hic quotus in diviſorem, inde triplum quadrati hujus quoti in primam notam, & poſtremo ipſius cubus ex tabula ſumatur, atque hæc tria addantur ea lege, ut unitates primi facti reſpondeant decadibus ſecundi, & unitates ſecundi decadibus tertii, ac ſumma ſubtrahatur a numero compoſito ex primo reſiduo, & ſecunda periodo; quodſi ſubtractio fieri nequeat eo quod ſumma ſubtrahenda ſit major numero minuendo, quotus ille tandiu unitate mulctetur, donec ſubtractio fieri poſſit. 3. Operatio præcepta in *n.* 2. repetatur in periodis ſequentibus. *d. f.*

In polinomio literali operatio eſt prorſus eadem. En utriuſque exemplum. Sit 1. eruenda radix ex numero 12812904. calculus ita ſe habebit.

Digitized by Google

234) 12,812,904

12) 3

36

54

27

4167

1587) 4

6348

1104

64

645904

48,12

4167

645

645 9,04

645904

000000

Sit 2. eruenda radix tertia ex polinomio $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$. En calculum.

$a + b + c)$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$

a^3

0

$3a^2$ $b)$

$3a^2b$

$3ab^2$

b^3

$3a^2b, + 3ab^2 + b^3$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$0 \quad 0 \quad 0$

$3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$

$3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$3a^2 + 6ab + 3b^2$ $c)$

$3a^2c + 6abc + 3b^2c$

$3ac^2 + 3bc^2$

c^3

Digitized by Google

Cor. I. SI plures fractiones habeant numeratores, qui eodem modo ſuos denominatores contineant, aut eodem modo in ſuis denominatoribus contineantur, quoti ex diviſione numeratorum per ſuos reſpectivos denominatores erunt æquales (*def.* 25) adeoque fractiones ipſæ erunt æquales. Si vero numerator unius pluries contineat ſuum denominatorem, quam numerator alterius, quotus pluries unitatem continebit in primo caſu, quam in ſecundo (*def.* 25) adeoque erit maior, (*n.* 8 *Prol.*) igitur ipſa fractio in primo caſu erit maior; ſi vero numerator unius pluries contineatur in ſuo denominatore, quam numerator alterius in ſuo, ille minorem denominatoris partem continebit, quam iſte (*n.* 8 *Prol.*) adeoque (*Sch.* 2 *def.* 25.) numerator ſecundus quodammodo continet pluries denominatorem ſuum, quam primus; & per dem: fractio ſecunda maioris erit valoris, quam prima, ſic $\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$, & $\frac{8}{4} = \frac{48}{24}$, ſed $\frac{16}{4} > \frac{12}{6}$, & $\frac{10}{30} < \frac{3}{5}$. Vice verſa ſi fractio $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & numerator $a = c$, etiam denominator $b = d$, ſi $b = d$, cum numeratores debeant in ſuis denominatoribus æqualiter contineri ex dem: etiam numeratores erunt æquales (*Th.* 19) ſi $a \gtrless c$, etiam $b \gtrless d$. (*Th. cit.*) nempe ſi fractio fractioni æquatur, & numerator unius æquatur numeratori alterius, etiam denominatores erunt æquales, ſi in eadem hyp. æquantur denominatores, etiam numeratores erunt æquales, ſi unius numerator ſit

ea minor eſt, quæ majorem habet denominatorem, &, ſi habeant eundem denominatorem, ea maior eſt, quæ maiorem habet numeratorem; ſic $\frac{5}{3} < \frac{4}{3}$, & $\frac{8}{9} > \frac{8}{16}$

Cor. 5. SI diviſor æquatur dividendo, quotus eſt 1 (*cor.* 3. *def.* 25.) ſi dividendo minor eſt,, quotus eſt unitate maior, ſeu unitatem pluries, quam ſemel, continet, ſi maior ſit, quotus integram unitatem ne ſemel quidem continet, ſed aliquam tantum ipſius partem (*def.* 25.) igitur, ſi in fractione denominator æquatur numeratori, fractio æquivalet uni integro, ſi ſit numeratore minor, fractio eſt uno integro maior, ſi ſit maior, fractio eſt uno integro minor, & in primo, ac ſecundo caſu fractio eſt ſpuria, vera eſt in tertio caſu (*def.* 20.) ſic $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{6}{14} = 1 + \frac{2}{4}$, & $\frac{3}{9} < 1$. æquatur uni parti tertiæ unius, ut conſtabit inferius.

Cor. 6. INtegra, quibus æquivalet fractio, ſunt fractionis valor, adeoque ex fractione ſpuria integra eruuntur, ſi numerator per denominatorem dividatur. Quodſi in diviſione reſiduum aliquod ſuperſit, indicio id erit, integra inventa non eſſe adæquatum valorem, ſed ipſis adijciendam eſſe fractionem, cuius numerator ſit illud reſiduum, denominator autem ipſe diviſor, ſeu denominator primæ fractionis ſpuriæ [*prob.* 6.) Sic $\frac{52}{7} = 7 + \frac{3}{7}$

Cor. 7. SI dividendus ſit N, diviſor M, erit $\frac{N}{M} = \frac{Q}{1}$, (*cor.4.def.25.*) jam idem numerus Q exponit tum multiplicitatem N ſuper M, tum ſubmultiplicitatem M relate ad N, & tum multiplicitatem Q ſuper 1, tum 1 reſpectu Q ſubmultiplicitatem. [*cor.* 2. *def.* 25.] Igitur in fractionibus $\frac{M}{N}$, & $\frac{1}{Q}$ adhuc idem erit exponens ſubmultiplicitatis numeratoris reſpectu denominatoris, adeoque & ipſæ æquales erunt (*cor.* 1.)

Th. 21. *FRactiones diverſorum denominatorum ſunt numeri heterogenei.*

Dem. DEnominator exponit nomen partium, quas numerat numerator, (*Th.* 9.) ſeu quæ in numeratore dicuntur unum. (*def.* 1.) Si ergo fractiones diverſis gaudeant denominatoribus, diverſæ etiam, & diverſi nominis ſunt partes, quæ in numeratoribus dicuntur unum, & pars una expoſita per unam fractionem non poteſt dici unum reſpectu unius earum, quæ ab altera exponuntur [*n.* 3. *Prol.*] adeoque heterogeneæ ſunt (*num.cit.*) ſed fractiones ſunt harum partium numeri (*cor.* 1. *th.* 9.) ergo fractiones diverſorum denominatorum ſunt numeri heterogenei *q. e. d.*

Th. 22. *FRactiones, quæ exponunt partes totorum heterogeneorum, ſunt numeri heterogenei.*

Dem. SI negas, ſint homogenei; igitur partes per eas fractiones numeratæ ſunt unitates homogeneæ, ita ut pars P totius T poſſit dici

ſit dici unum reſpectu partis p. totius t (*n.* 3. *Prol.*) Sicuti ergo totum T exurgit ex repetitione unitatis P (*n.* 6. *Prol.*) ita exurget etiam ex repetitione unitatis p. Jam denominator eſt numerus, qui exponit quoties pars in toto contineatur (*th.* 6.) Si ergo hæ partes eodem nomine gaudeant, totum t continebit toties partem p, quoties totum T continet partem P, vel ipſam p; (*ex dem*) ſi diverſo, tota T, & t diverſo modo continebunt partem p; adeoque in primo caſu æqualia erunt, inæqualia in ſecundo (*n.* 6. *prol.*) ſed quæ æqualia, vel inæqualia ſunt, homogenea ſunt (*n.* 8. *prol.*) igitur tota erunt homogenea, *quod eſt contra hyp.*

Sch. *Tota heterogenea eſſe poſſunt, vel quia ſignant res diverſas, vel quia rem eandem diverſo modo ſignant. Si totum unum ſit pondus, alterum extenſio, ſunt heterogenea in primo ſenſu; ſi totum unum ſit menſura Romana, alterum Pariſina, dicuntur heterogenea in ſecundo ſenſu. Fractiones heterogeneæ propterea quod referuntur ad tota heterogenea in primo ſenſu, ad homogeneas reduci nullo pacto poſſunt; rerum enim eſſentiæ ſunt immutabiles; ſed relatæ ad tota heterogenea in altero ſenſu, ad homogeneas reduci poſſunt. Quoniam enim tota, ut ut heterogenea, rem eamdem ſignant diverſo modo, ſeu diverſimode rei eiuſdem quantitatem exponunt, ſi ſtabiliatur aliqua eiuſdem rei minima portio, quæ toti utrique applicetur, & utrumque numeret, utrumque exprimetur numeris ad eamdem unitatem relatis conſequenter homogeneis. Sic pes Pariſinus, & Ro-*

Digitized by Google

manus ſunt tota, quorum unum non poteſt dici unum reſpectu alterius, & hoc ſenſu adhuc ſunt heterogenea, & fractiones $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, quarum prima ad Pariſinum, altera ad Romanum referatur, adhuc heterogeneæ ſunt, ſed ſi linea prima, vel ſecunda &c. accipiatur pro unitate, & utrique pedi applicetur, & menſura utriuſque exponatur numero ad ipſam lineam relato, evadent tota homogenea, & heterogeneæ ipſæ fractiones, ſi ita modificentur, ut ad eandem lineam, ad quam referuntur tota, & ipſæ referantur, homogeneæ fient. Uſuvenit etiam, præſertim in ſubdiviſionibus numerorum, menſurarum, ut una, & eadem res habeatur pro toto, & parte. Sic aſſes reſpectu juliorum conſiderantur ut partes, reſpectu teruntiorum conſiderantur, ut tota, unde etiam prodeunt aliæ heterogeneæ fractiones, quarum illæ, quæ oriuntur ex immediata diviſione primi totius, dicuntur ſimplices, quæ vero oriuntur ex diviſione mediata partium primi totius, dicuntur fractiones fractionum; quarum quidem duplex eſt genus. Vel enim fractio fractionis refertur ad unam partem earum, quæ a denominatore fractionis ſuperioris exponuntur, tamquam ad totum; vel refertur ad totam fractionem ſuperiorem. Sic, ſi $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$ *ſint fractiones, quarum prima ſit ſimplex, & altera ſit fractio fractionis, vel* $\frac{2}{9}$ *intelliguntur eſſe nonæ partes unius ſeptimæ, vel trium ſeptimarum. Adverte in primo ſenſu fractionem fractionis congrue*

poni

poni poſt ſimplicem, in ſecundo ante ipſam. Sic ſi $\frac{2}{9}$ *ſint duæ nonæ unius ſeptimæ, ſcribitur* $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$, *ſi ſint trium ſeptimarum, ſcribitur* $\frac{2}{9}\ \frac{3}{7}$ *ſubſtituto loco ſigni additionis ſigno multiplicationis, cuius rei ratio infra manifeſta erit; ex quo etiam diverſo modo enunciantur; ſic* $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$ *leguntur* tres ſeptimæ, plus duæ nonæ unius ſeptimæ, *ſed* $\frac{2}{9}\ \frac{3}{7}$ *leguntur* duæ nonæ trium ſeptimarum. *Agedum ergo, quoniam additio, & ſubtractio, non fiunt niſi numeri dati ſint homogenei* [cor. gen. art. 1.] *fractiones heterogeneas, propterea quod referuntur ad diverſa tota, reducamus ad tota eadem; inde heterogeneas ratione diverſi denominatoris ad eumdem, ut ſic ad operationes ſuſcipiendas præparentur.*

Prob. 15. *FRactionem fractionis ad ſimplicem reducere*

Reſol. 1.o SI fractio fractionis fuerit ſub ſigno +, ſeu primum ſenſum (*in ſch. præc.*) deſcriptum præſeferat, duc denominatorem ſimplicis in denominatorem fractionis fractionis; & factum erit denominator novæ fractionis ſimplicis ejuſdem valoris cum fractione fractionis, numerator vero ille ipſe, quem fra-

ctio

ctio fractionis habebat. Sic $\frac{2}{9}$ unius decimæ valent $\frac{2}{90}$ unius integri.

Quodſi fractiones huiuſmodi plures fuerint, ita ut quælibet poſterior referatur ad anteriorem, uti fractio fractionis ad ſimplicem fractionem, tum earum quælibet reducetur in ſimplicem, ſi eius denominator ducatur in denominatores omnium antecedentium, & factum numeratori, quem antea habebat, ſubſcribatur. *e. g.* $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$ &c. $=$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{15} + \frac{2}{45} + \frac{3}{360} + \frac{1}{1440}$ &c. *q. e.* 1. *f.*

2 Fractiones fractionum in ſecundo ſenſu ante ſignum nempe multiplicationis poſitæ, reducuntur ad ſimplices, ducendo in ſe invicem numeratores, ac denominatores, & factum ex his ſubſcribendo facto ex illis: ſic $\frac{3}{5}\,\frac{2}{7} = \frac{6}{35}$, & $\frac{2}{5}\,\frac{4}{7}\,\frac{3}{8} = \frac{24}{280}$ *q. e.* 2. *f.*

Dem. I. Denominator ſimplicis exponit omnes aliquotas, in quas totum primo dividitur, (*th* 4.] denominator ſecundæ exponit omnes aliquotas, in quas dividitur ſecundo quælibet ex aliquotis primis [*ſch. præc. & th. cit.*) jam vero, ſi tot aliquotæ ſecundæ, quot continet una aliquota prima, toties ſumantur, quot ſunt aliquotæ primæ (*h. e*; *ſi ducantur in ſe invicem denominatores ex def.* 24.) habe-

habebitur numerus omnium aliquotarum ſecundarum, quas continet totum: ſeu factum ex denominatoribus exponet omnes aliquotas totius: & non amplius aliquotas aliquotæ. Fractio igitur huiuſmodi facto denominata erit ſimplex. (*ſch. præc.*) hæc ut plenius intelligantur, peculiari exemplo applicemus. Sit fractio fractionis $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$; totum continet octo octavas, & quælibet octava continet quatuor quartas unius octavæ; hinc totum continet octies quatuor quartas unius octavæ, ſeu triginta duas quartas unius octavæ. Cum enim numerus omnium aliquotarum ſit denominator partium, 32 denominabit partem quartam partis octavæ.

Fractio fractionis evadit fractio ſimplex, ſi loco denominatoris ipſius ſubſtituatur factum ex denominatore, quo primo gaudebat, in denominatorem fractionis ſimplicis (*ex dem.*). Quodſi fractiones fractionum plures fuerint ad ſimplices reducendæ, fractio fractionis ſecunda evadet ſimpliciter fractio fractionis, ſi prima evadat ſimplex, & ipſa ſecunda evadet ſimplex, ſi eius denominator ducatur in denominatorem primæ ad ſimplicem reductæ. Sed denominator primæ ad ſimplcem reductæ eſt factum ex denominatore primæ fractionis fractionis in denominatorem fractionis ſimplicis (*ex dem.*) ergo fractio fractionis ſecunda reducta ad ſimplicem fractionem habet pro denominatore factum ex denominatore, quo gaudebat, in denominatores primæ fractio-

fractionis fractionis, & fractionis ſimplicis. Simili modo res oſtenditur, ſi aliæ fuerint. Ut hæc demonſtratio nitidior fiat, fractio ſimplex notetur *fs*, fractio fractionis notetur *ff*, ſecunda *fff*, tertia *ffff*. Demonſtratio ita exponetur. Ut *ff* evadat *fs* debet duci denominator ipſius *ff* in denominatorem *fs*. Evadente *ff* in *fs*, ipſa *fff* conſideratur ad inſtar *ff*, quæ reducitur in *fs*, ſi eius denominator ducatur in denominatorem *f.f.* reductæ ad *fs*. Sed denominator *ff* reductæ ad *f.s.* eſt factum ex denominatore *ff* in denominatorem *fs*; ergo *fff* reducta ad *fs* habet pro denominatore factum ex denominatore *fff* in denominatorem *ff* in denominatorem *fs*. Ad valorem quod attinet, dum loco denominatoris *ff* ſubſtituitur factum ex denominatore *ff* in denominatorem *fs*, ex *dem.* nil aliud efficitur, quam ut partes denominatæ per relationem ad *fs* denominentur relate ad totum T. Cum idem numerus aliquotarum earundem, ut ut diverſimode denominatarum in diverſis relationibus, habeat eundem ſemper valorem (*num.* 8. *prol.* vel *e in prol.*) & huiuſmodi numerus ſit numerator ipſius *ff*, (*th.* 9.) patet in reductione ſalvo valore ipſum eſſe retinendum.

2 Quodſi *ff* ſumatur in ſecundo ſenſu, & numerator ſimplicis ſit *x*, pro ſingulis unitatibus ipſius *x* in reductione *ff* ad *fs* ponendus erit numerator ipſius *ff*, qui ſit *z* [*caſ.* 1.) ſed toties *z*, quoties *x* continet 1, eſt *x z*, (*def.* 24.) ergo in reductione numerator eſſe debebit *x z*.

Cor. 1.

Cor. I. Cum pro numero quocumque n ſumi poſſit $\frac{n}{1}$ (*cor.* 4. *def.* 25.) fractio $\frac{a}{b}$ numeri n erit reſpectu $\frac{n}{1}$ fractio fractionis, quæ reducta ad ſimplicem evadet in $\frac{an}{b}$; igitur fractio numeri evadit fractio unitatis, ſi numerus ipſe ducatur in numeratorem fractionis. Sic $\frac{1}{4}$ 4 æquatur $\frac{4}{4}$ = 1 (*cor.* 6. *th.* 20.)

Cor. 2. Hinc fractiones diverſorum totorum, ſeu diverſis numeris expreſſorum, ne etiam ratione eorum heterogeneæ ſint, in fractiones unitatis converti poſſunt. *v. g.* $\frac{1}{3}$ pedis Romani, $\frac{1}{5}$ Pariſini heterogeneæ ſunt, propterea quod pes ille exponitur numero 1320, & hic numero 1440. Sed ex hoc capite heterogeneæ amplius non erunt, ſi ipſis ſubſtituantur $\frac{1320}{3}$, & $\frac{1440}{5}$ (*cor.* 1.) quæ non erunt amplius fractiones pedum diverſorum, ſed ejuſdem lineæ pro unitate aſſumptæ.

Cor. 3. Totum t = $\frac{t}{1}$ (*cor.* 4. *def.* 25.) = $\frac{tT}{T}$ (*Cor.* 3. *th.* 20.) porro fractio $\frac{t}{T}$ conſiderata ut contenta ſub toto T = $\frac{tT}{T}$ fractioni contentæ ſub unitate (*Cor.* 1) = t (*cor.* 3. *Th.* 20.) Igitur, ſi totum t referre velimus ad totum T, ipſius valorem, tuetur

tuetur fractio $\frac{t}{T}$ relata tamen, non ad unitatem, ſed ad totum T. *v. g.* pes Romanus relatus ad Pariſinum æquivalet $\frac{1320}{1440}$ pedis Pariſini, non unitatis.

Cor. 4. SIt ergo fractio $\frac{x}{z}$ totius *t*, quod relatum ad totum T degenerat in fractionem $\frac{t}{T}$ (*cor.* 3) eſt ergo $\frac{x}{z}$ fractio fractionis $\frac{t}{T}$, quæ reducta ad ſimplicem evadit $\frac{tx}{TZ}$ (*Prob. præc.*) quæ fractio & ipſa referetur ad totum T, ſicuti ſimplex $\frac{t}{T}$: ſic $\frac{1}{3}$ pedis Romani evadit in $\frac{1320}{4320}$ pedis Pariſini.

Cor. 5. ET quoniam numerus *n*, in quo pro unitate aliquod totum ſumitur, haberi poteſt pro fractione $\frac{n}{1}$ eiuſdem totius, ſimili modo numerus, in quo aliquod totum pro unitate ſumitur transformari poteſt in numerum, in quo totum aliud pro unitate ſumatur; ſubſtituendo loco *x* ipſum *n*, & loco *z* denominatorem 1 in formula $\frac{tx}{Tz}$; ex qua ſubſtitutione prodit $\frac{tn}{T}$: ſic 7 pedes Romani reducti ad Pariſinos efficiunt $\frac{9240}{1440} = 6 + \frac{600}{1440} = 6 + \frac{60}{144}$ (*cor.* 3. *probl.* 11.)

Sch. Ex

Sch. *EX ipſis formulis regulæ enunciationem potes eruere; ſic ex formula* $\frac{tx}{Tz}$ *regula reducendi fractionem* $\frac{x}{z}$ *totius* t *ad totum* T *eſt* per factum ex denominatore in totum, ad quod fractio eſt reducenda, dividatur factum ex numeratore in totum, ad quod antea referebatur. *& ex formula* $\frac{nx}{T}$ *regula reducendi numerum, in quo pro unitate ſumatur totum aliquo numero expreſſum, ad numerum, in quo unitas ſit totum alio numero expreſſum eſt*, per numerum reſpondentem toti, ad quod datus numerus eſt reducendus, dividatur factum ex ipſo dato numero in numerum reſpondentem toti, quod in ipſo pro unitate ſumebatur.

Prob. 16. *FRactiones diverſi nominis ad idem nomen reducere.*

Reſol. DUcantur in ſe invicem omnium denominatores, & numerator uniuscujusque in denominatores aliarum, factum primum erit communis denominator, & ſecundum reſpectivus numerator fractionis novæ eiuſdem cum data valoris: ſint *v.g.* fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ &c. erit $bdfh$ communis denominator, & $\frac{a}{b} = \frac{adfh}{bdfh}$, $\frac{c}{d} = \frac{cbfh}{bdfh}$, $\frac{e}{f} = \frac{ebdh}{bdfh}$, & $\frac{g}{h} = \frac{gbdf}{bdfh}$, vel ſint $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, erit 35 communis

deno-

denominator, & $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$, $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$. Sint $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{8}$, erit 168 communis denominator, & $\frac{112}{168} = \frac{2}{3}$, & $\frac{72}{168} = \frac{3}{7}$, & $\frac{105}{168} = \frac{5}{8}$.

Dem. SInt fractiones duæ $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ (*cor* 2. *th.* 10.) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, & $\frac{cb}{bd} = \frac{c}{d}$. Sint tres $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ $\frac{e}{f}$ ex *eodem cor.* $\frac{adf}{bdf} = \frac{a}{b}$, $\frac{cbf}{bdf} = \frac{c}{d}$ &c. Eodem modo res eſt manifeſta in pluribus, in præſenti nimirum operatione per idem numerator, & denominator multiplicantur, unde valor (*cor. cit.*] non immutatur.

Cor. HInc datarum fractionum quænam ſit maior, & quænam minor, explorari poteſt: iis ſcilicet ad idem nomen reductis, ea erit maior (*cor.* 1. *th.* 20.) quæ maiorem habebit numeratorem. Sic ex $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ maior eſt $\frac{5}{8}$; facta enim reductione $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$, cum tamen $\frac{3}{5}$ efficiant tantum $\frac{24}{40}$.

Sch. *EN tibi tandem fractiones ad ultimam homogeneitatem reductas, & ad operationes ſufficienter præparatas. Illud unum deſiderari adhuc poteſt, ut cum terminorum magnitudo operationum ſimplicitati aliquando obſtet, huic quoque incommodo occurramus prob. ſequenti.*

Prob. 17.

Digitized by Google

Prob. 17. F*Ractionem ad minimos terminos reducere.*

Reſol. VAlor fractionis idem manet, ſi numerator, & denominator per idem dividantur (*cor.* 2. *th.* 20:) Porro quanto maior eſt diviſor, tanto minor eſt quotus (1. *p. th.* 19.); ut itaque fractio reducatur ad minimos terminos, quærendus eſt numerus maximus, qui fractionis terminum utrumque dividat, qui etiam dicitur maxima communis menſura. En regulam. Dividatur terminus fractionis maior per minorem, ſi nullum fuerit reſiduum, erit minor menſura maioris, ſi reſiduum aliquod prodeat, dividatur minor per reſiduum; inde reſiduum primum per ſecundum, ſecundum per tertium, donec pervenias ad reſiduum 0, vel 1. Si veneris ad reſiduum 0, diviſor ultimus erit menſura maxima quæſita, ſi ad reſiduum 1. termini fractionis erunt numeri primi (*def.* 15.) adeoque fractio ad minores terminos reduci non poterit per dem: quod ultimus diviſor ſit communis, & maxima menſura apertum facit ſequens.

Dem. SIt numerus maior M, minor m, reſiduum primum R, reſiduum ſecundum R2, tertium R3, quartum R4 &c. Quoniam ultimum reſiduum *v. g.* R4 dividit R3 ſine reſiduo (*hyp.*), ergo, ſi ipſum ducatur in ultimum quotum Q4, erit Q4 R4 = R3 (2. *p. th.* 17.) adeoque ultimum reſiduum ſumptum vicibus Q4 adæquat penultimum R3. Sed Q. 3. R3 + R4 = R2 (2 *p. th.* 17.) Igitur R4, quod aliquoties ſumptum metitur ipſa R3 contenta in Q3 R3 (*ex*

additæ efficiunt $\frac{29}{35}$, & ſubtractis $\frac{2}{5}$ ex $\frac{3}{7}$ remanet $\frac{1}{35}$. Aliquando compendii cauſa additio, & ſubtractio indigitatur mediante ſigno +, vel −. Sic in noſtro caſu ſumma etiam exprimitur per $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$, & differentia per $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}$. Similiter fractionum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſumma eſt, vel $\frac{ad+bc}{bd}$, vel $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, & differentia eſt, vel $\frac{ad-bc}{bd}$, vel $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$. Nonnumquam numerator ſubtrahendæ eſt polinomium, cuius partes diverſis ſignis coniunguntur, eius autem ſubtractio fit præmiſſo ſigno − ſoli polinomio intra parentheſes tamen incluſo, & ſignis eius intrinſecis minime mutatis; ut ſi ex fractione $\frac{a+b}{c}$ ſubtrahenda ſit $\frac{d-e+f}{c}$ earum differentia erit $\frac{a+b-d+e-f}{c}$, vel etiam $\frac{a+b-(d-e+f)}{c}$ imo id nonnumquam fit etiam in ſubtractione integrorum: ad evitandum ſcilicet tædium in mutandis in contraria ſignis ſubtrahendi polinomii, ipſum parentheſibus includitur, & eidem toti ſignum − præfigitur.

Dem. NUmerator numerat aliquotas unitatis, quas fractio exponit (*th.* 9.) Quodſi fractiones reducantur ad idem nomen, nume-

numeris mixtis uulgaribus fractiones integrorum ſpeciem mentiuntur, quia loco denominatoris aliquod adhibetur nomen, ut cum loco partium duodecimarum libræ dicimus uncias, loco quintarum aſſis dicimus teruntia, loco duodecimarum oboli denarios &c. Sed ſi ex nomine, quod præſeferunt, eruatur denominator ipſis conveniens, iiſdem legibus, quas pro fractis, & mixtis addendis, ac ſubtrahendis præſcripſimus, ſubiicientur,

Prob. 19. F*ractiones multiplicare, ac dividere.*

Reſol. 1o DUc numeratores, ac denominatores in ſe invicem, & facto primo ſubſcribe poſterius *d. f. q. e.* 1.

2 Duc numeratorem dividendæ in denominatorem dividentis, & huic facto ſubſcribe productum ex numeratore dividentis in denominatorem dividendæ *d. f. q, e.* 2

Dem. I. SIt multiplicanda $\frac{N}{M}$, cui reſpondeat quotus Q, multiplicans $\frac{n}{m}$, cui reſpondeat quotus *q*: [*th.* 20.] erit $\frac{N}{M} = \frac{Q}{1}$, & $\frac{n}{m} = \frac{q}{1}$ (*cor.* 6. *def.* 25.) Quodſi has fractiones fractionum $\frac{N}{M} \cdot \frac{n}{m} = \frac{Q}{1} \cdot \frac{q}{1}$ æquales reducas ad ſimplices (*p.*1. *prob.* 11.) habebis $\frac{Mm}{Nn} = \frac{Qq}{1} = Qq$. Cum igitur Qq exprimat factum ex datis fractionibus, ſeu earundem valoribus (*th.* 20.] idem

dem factum exponetur etiam per $\frac{Mn}{N1}$ *q. e.* 1.

2. Quotus ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ eſt $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ (*def.* 25.) $= \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd}$ (*cor.* 2. *th.* 20.) Sed $\frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd}$ (*cor.* 6. *def.* 25.) $= \frac{ad}{cb}$ (*cor.* 2. *th*: 20.) nimirum multiplicando numeratorem $\frac{ab}{bd}$ per $b\,d$ prodit $a\,d$ [2. *p. th.* 17.] & multiplicando per bd denomitorem $\frac{cb}{bd}$ prodit $c\,b$. Ergo &c. *q. e.* 2.

Cor. I. INtegrum $a = \frac{a}{1}$ (*cor.* 4. *def.* 25.) ſi ergo per fractionem $\frac{b}{c}$ multiplicari debeat, factum erit $\frac{ab}{1c} = \frac{ab}{c}$ (1. *p. prob. hujus*) h. e. integrum per fractionem multiplicatur, ſi ipſum in numeratorem fractionis ducatur.

Cor. 2. SImiliter, ſi fractio $\frac{b}{c}$ dividi debeat per a, ſeu $\frac{a}{1}$, quotus erit $\frac{b}{ac}$ (2. *p. hujus*) hoc eſt fractio per integrum dividitur, ſi ipſum integrum ducatur in eius denominatorem.

Cor. 3. COntra quotus ex a per $\frac{b}{c}$ eſt $\frac{ac}{b}$.

Sch. H*Inc abſolvitur multiplicatio, & diviſio mixtorum, nimirum multiplicatio numerorum mixtorum quodammodo quadruplex*

druplex eſt; cum enim ſingulæ partes multiplicatoris duci debeant in ſingulas multiplicandi, prius ducenda erit fractio adhærens multiplicatori in eam, quæ multiplicando adhæret, quæ operatio abſolvitur regula in præſ. probl. *tradita, inde eadem duci debet in integra multiplicandi ipſius, quod abſolvitur regula tradita in* cor. 1. *inde integra multiplicatoris in fractionem multiplicandi, quod rurſus perficitur per regulam* cor. 1. *denique integra multiplicandi in integra multiplicatoris, quod expedies regulis* Prob. 6. vel 10. *quodſi integra ex fractionibus ſecundæ, & tertiæ multiplicationis eruta transferas ad ultimum factum mere integrorum, multiplicatio ex aſſe abſolvetur: ſic* $3 + \frac{3}{7}$ in $5 + \frac{2}{9} = \frac{6}{63} + \frac{15}{7} + \frac{6}{9} + 15 = 17 + \frac{1}{7} + \frac{6}{9} + \frac{6}{63} = 17 + \frac{1}{7} + \frac{2}{3} + \frac{6}{63} = 17 + \frac{1}{7} + \frac{2}{3} + \frac{2}{21} = 17 + \frac{399}{441}$. *Diviſio pariter mixtorum quadruplex eſt, eaque abſolvitur juxta* (Prob. 10. 2. p. hujus, & cor. 2.) *Sic quotus ex* $9 + \frac{2}{3}$ *per* $3 + \frac{1}{5} = \frac{10}{3} + \frac{2}{9} + \frac{45}{1}$ $(45) + 3 = 48 + \frac{10}{3} + \frac{2}{9} = 51 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$ [cor. 6. th. 20.] *Eadem operationes facilius abſolvuntur, ſi numeri mixti convertantur in fractiones ſpurias, & quidem homogeneas fractioni infimæ ſpeciei juxta regulam tradi-*

traditam in cor.3. th. 20.; *& ex fractione prodeunt poſt multiplicationem, vel diviſionem rurſus eruantur integra* (cor. 6. th. 20.) *v. g. ſi duci debeat* $3 + \frac{2}{3}$ *in* $2 + \frac{3}{4}$, *cum* $3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$; *&* $2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, *erit factum* $\frac{121}{12}$ (prob præs.) $= 10 + \frac{1}{12}$. *ſi mixtus componatur ex pluribus partibus, ita ut fractiones poſteriores referantur ad unam partem earum, quæ exponuntur per fractionem anteriorem, tamquam ad totum, fractio infima reducenda erit ad ſimplicem, inde cum antecedente ad idem nomen, poſtmodum ad fractionem huius nominis reducendum erit ipſum integrum, ne ſcilicet relationes, quas habent diverſæ mixti partes ad tota diverſa, miſceantur, & pro iiſdem habeantur. Sic numerus iuliorum, aſſium, teruntiorum v. g.* $3 + \frac{4}{10} + \frac{2}{5}$ *reducitur in* $\frac{172}{50}$. *Non deſunt apud practicos artificia, quibus non modo in puris, ſed etiam in ſpurijs fractionibus, compendioſe magis operantur; ſed hic talia ſufficit attuliſſe principia, ex quibus quiſque poſſi marte ſuo compendia deducere, & compendiorum apud practicos inventorum rationem deſſumere.*

Prob. 20. *EX fractione data radicem quadratam, & cubicam extrahere.*

Reſol. ERuatur ex numeratore ſecunda, vel tertia radix, & huic ſubſcribatur ſecun-

ſecunda, vel tertia radix denominatoris. *d. ſ. q. e.* 1. & 2.

Dem. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$) 2 (*def.* 26.) $= \frac{a^2}{b^2}$ (*probl.* 19.) ergo [*def.* 26.] $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$. Sed $a = \sqrt{a^2}$, & $b = \sqrt{b^2}$ [*def. cit.*] ergo &c. *q. e.* 1.

2. Eodem modo demonſtratur.

Cor. 1. EX numero mixto radix eadem regula eruitur, ſi ipſius pars integra (*cor.* 3. *th.* 20.) convertatur in fractionem ejuſdem denominatoris cum ea, cui adhæret *v. g.* 2 $+ \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ (*cor. cit.*), & ejus radix quadrata (*probl. præſ.*) eſt $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ [*cor.* 6. *th.* 20.] & $3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$ (*cor.* 3. *th.* 20.), cujus radix cubica (*probl. præſ*) eſt $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ [*cor.* 6. *th.* 20.]

Cor. 2. SI alicujus integri $a2$ radix deſideretur in partibus, quarum denominator ſit b; reducto integro $a2$ ad fractionem, $\frac{a^2 b^2}{b^2} = a^2$, $\frac{ab}{b}$ erit illius radix (*probl. præſ.*) & quidem in partibus, quibus b nomen tribuit: ſimiliter ſi in partibus per b denominatis deſideretur radix cubica numeri a_3, debebit a^3 reduci ad fractionem, cujus denominator ſit b^3, ex qua radix cubica (*probl. præſ.*) eruta erit fractio, cujus denominator erit b.

Digitized by Google

Cor. 3. SI radix ſecunda deſideretur in decimis, erit $b = 10$, & $b^2 = 100$, adeoque numerus propoſitus erit multiplicandus per 100, quod fit eidem ad dexteram adjiciendo 00 (*cor.* 1. *prob.* 10.) ſi in centeſimis, erit $b = 100$, & $b^2 = 10000$, adeoque numerus propoſitus erit ducendus in 10000, quod fit ei ad dexteram adjiciendo bis 00. In genere numero propoſito adjicienda ſunt tot 00, quot 0 ſunt in denominatore b. Si vero in decimis, centeſimis &c. deſideretur radix tertia, ſimili calculo invenies numero propoſito adjicienda eſſe tot 000, quot 0 ſunt in denominatore.

Sch. *QUem uſum habeant, quæ in* cor. præc. *demonſtravimus, videbis, ſi ad ſequentia bene attendas. Proponuntur plerumque numeri, ex quibus accurata radix erui minime poteſt, quia perfecta quadrata non ſunt, aut perfecti cubi, ſed erui ſolum poteſt radix maximi quadrati, aut cubi in ijs contenti; atque huius quidem radicis nota ultima ſi unitate augeatur, ex multiplicatione radicis per ſe ipſam prodit numerus propoſito maior: vide n. 3. in reſ. prob.* 13. *&* 14. *Radix ergo huiuſmodi a vera quidem deficit, ſed defectus infra* 1. *eſt; & quo minor quantitas pro* 1. *ſumitur, ſemper defectus ille minor evadit. Quamobrem methodus eruendi radicem in partibus decimis, centeſimis &c. ad eas quantumcumque veris approximandas conducit. Non negandum interim, quod ubi ex dato numero integro radix accurata in integris erui non poteſt, nec in fractis ea erui poteſt. Ea enim ſi in fractis daretur, aut eſſet vera fra-*

ctio

Digitized by Google

ctio, aut ſpuria, quæ ad integra reduci non poteſt (ſi enim poſſet, radix dati numeri daretur in integris, quod eſt contra hyp.) Porro fractio, quæ dati numeri radix ſit, in ſe ducta illum numerum producere debet. [ſch. probl. 14.] *Atqui fractio vera in ſe ducta integrum nequit producere, ſed potius fractionem ipſa minorem* (probl. 19.) *nec integrum producere poteſt fractio ſpuria, quæ ad integra reduci non poſſit. Exponatur enim per mixtum* $a + \frac{b}{c}$, *erit factum* $a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$. *Jam ſi ex* $\frac{2ab}{c}$ *eruantur (ſiqua continet) integra, aut nihil remanebit, in quo caſu habes intentum, aut fractio, cujus denominator ſit* c (cor. 6. th. 20.) *Porro* $\frac{b^2}{c^2}$ *eſt fractio fractionis, cujus denominator eſt* c (probl. 16.) *adeoque* $\frac{b^2}{c^2}$ *cum illa reſidua fractione integrum nequit efficere, & proinde etiam in hoc caſu intentum habetur. In cubo hujuſmodi fractionum ſpuriarum oriuntur fractiones fractionum, adeoque quoad radicem cubicam propoſitum luculentius evincitur. Hinc ſi numeri* a *radix in integris non detur, ea ſolum indicari poterit per* $\sqrt{a}$. *Atque en tibi geneſim numerorum irrationalium.*

Sch. 2. *Poſtquam regulas tradidimus operandi in fractis, & mixtis, quoniam uſuvenit, ut operationes ipſæ fractiones ita immutent, ut de earum valore judicium ferri nequeat, operæ pratium erit modum hic aſſignare hujuſ-*

Digitized by Google

hujuſmodi judicium tuto ferendi. Sed prius obſervo, quodſi integrum ſignet aliquam ſpeciem ſuperiorem puta libram, aſſem, decempedam &c. fractio tunc tandem intelligi dicitur, cum invenitur, quot inferiora eadem ſignet, quot uncias, quot teruntia, pedes &c Totum ergo negotium huc redit, ut ſi denominator fractionis non ſit idem cum illo, quod reſpondet ſpeciebus inferioribus conſideratis ad inſtar fractionum, ſpecierum ſuperiorum, ſeu ſi non ſit idem cum numero inferiorum, quæ continet ſuperius, fractio ſalvo valore convertatur in aliam, quæ hujuſmodi denominatore gaudeat. v. g. *in ponderibus libra continet* 12 *uncias; ſi ergo fractio non gaudeat dinominatore* 12, *in aliam, quæ hunc habeat denominatorem, convertenda erit, ut ſic numerator novus uncias numeret, eſto igitur.*

Prob. 21. *FRactionem transformare in aliam ejuſdem valoris, & denominatoris dati.*

Reſol. DUc denominatorem datum in numeratorem fractionis propoſitæ, & factum divide per primum denominatorem, quoto ſubſcribe datum denominatorem. *d. f. v. g.* $\frac{2}{3}$ ſit reducenda ad denominatorem 12, habebis $\frac{24:3}{12} = \frac{8}{12}$, ut adeo ſi ſermo ſit de ponderibus, illa fractio $\frac{2}{3}$ libræ æquivaleat octo unciis

Dem. FRactio $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (*cor.2.th.*20.) $= \frac{ac:b}{c}$ (*idem cor*) *q. e. d.*

Sch. 1.

Sch. I. S*I dividendo* a c *per* b *aliquod reſiduum ſuperſit* r, *quotus in integris erit numerator proximus fractionis, cui ſubſcribendus eſt denominator datus, fractio autem* $\frac{r}{b}$ *erit complementum numeratoris ejuſdem, cui proinde idem denominator* c *ſubſcriptus intelligetur, eamque ob rem, ſi quotus in integris proximus ſit* q, *reſiduum* r, *fractio* $\frac{a}{b}$ *reducta ad denominatorem* c *æquivalet* $\frac{q + \frac{r}{b}}{c} = \frac{q}{c} + \frac{\frac{r}{b}}{c} = \frac{q}{c} + \frac{r}{b}\frac{1}{c}$ (prob. 11.) *illa igitur fractio, quæ ſupereſt in diviſione in hoc* prob. *præcepta, eſt fractio fractionis, cujus ſimplex ipſi reſpondens eſt alia fractio, cujus numerator eſt* 1, *denominator ille, ad quem prima fractio reducta eſt. Sic* $\frac{2}{5}$ *reductæ ad denominatorem* $12 = \frac{4}{12} + \frac{4}{5}\frac{1}{12}$, *puta in ponderibus quatuor unciis + quatuor quintis unius unciæ.*

Cor. I. QUodſi ſpecies inferior aliam ſub ſe contineat, ut *v. g.* uncia ſcrupulos, ex fractione ſecunda eodem modo eruentur ſcrupuli eadem regula, qua unciæ ex prima, ſi ipſa reducatur ad denominatorem eundem cnm numero ſcrupulorum in uncia contentorum, vel in genere ad numeratorem eundem cum numero ſpecierum inferiorum in ſuperiori contentarum.

Sch. 2. *HInc practici reſiduum primum, quod eſt primæ fractionis numerator, in diviſione ducunt ſtatim in denominatorem ſpeciei inferioris, ut ſi dividant ſcuta, in* 10, *qui eſt denominator iuliorum, & factum dividunt per diviſorem, qui eſt illius denominator, quotum hunc adjicientes primo, & ſubſcribentes ipſi pro denominatore eum numerum, in quem duxere reſiduum primum. Reſiduum ſecundum in denominatorem tertiæ ſpeciei, reſiduum tertium in denominatorem quartæ ducunt, & ſemper facta dividunt per diviſorem primum* v. g. *Dividendo* 19 *ſcuta per* 7, *quotus eſt* $2 + \frac{5}{7}$, *qui juxta hanc regulam reducitur in* $2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10} + \frac{0}{5}$ *ſuppoſitis ſpeciebus nummorum more Romano diviſis, nimirum ſcuto diviſo in* 10 *julios, julio in* 10 *aſſes, aſſe in* 5 *teruntia, in quibus diviſio terminatur. Unde ille quotus valet ſcuta duo, julios ſeptem, aſſem unum, teruntia* 0. *Cum vero ex ipſa diviſione nummorum in ſpecies inferiores innoteſcant denominatores harum fractionum, ji reticeri poſſunt, & ſubintelligi, ſic ut pro illo quoto poſſit conſcribi* 2. 7. 1. $\frac{0}{5}$. *Scimus enim primam notam eſſe ſcutorum, ſecundam juliorum, tertiam aſſium, quartam teruntiorum.*

Cor. 2. CUm multiplicatio numeri cuiuſcumque per 10, 100, 1000 &c. fiat adjiciendo ad dexteram illi numero 0, vel 00, ve

00, vel 000 &c. fractio cuiuſcumque generis ad decimalem cuiuſcumque ordinis reducitur, ſi numeratori ad dexteram tot cyphræ adjciantur, quot unitates habet numerus exponens ordinem, ad quem eſt reducenda, & numerus inde exurgens per denominatorem dividatur. Sic fractio $\frac{2}{5}$ reducta ad decimalem quinti ordinis evadit $\frac{200000:5}{100000} = \frac{40000}{100000} = 0.\ 40000$ (*prob. 5.*) & $\frac{3}{7}$ reducta ad decimalem noni ordinis evadit $\frac{3000000000:7}{1000000000} = 428571428\frac{4}{7} = 0.$ $428571428.\frac{4}{7}$

Sch. 3. *Cum in diviſione reſiduum diviſore majus eſſe nequeat, nec ipſi æquari; alias in eo adhuc contineretur, numerator fractionis, quæ ex diviſione emergit, ſemper erit denominatore minor, ac proinde ipſa fractio minor unitate,* (cor. 5. def. 20.). *Eſt autem fractio oriens in reductione fractionum ad datum nomen fractio fractionis, cui reſpondens fractio ſimplex eſt fractio, cuius numerator* 1 *denominator vero ille, ad quem prima fractio reducitur* v. g. *Si* $\frac{2}{7}$ *reducas ad decimas, fractio* $\frac{6}{7}$ *in ea reductione oriens æquivalet* $\frac{6}{7}$ *unius decimæ* (ſch. præced) *huiuſmodi ergo fractio ſimplex reſpectu fractionis in ea reductione orientis ſe habet ut* 1.

(ſch.

(ſch. th. 22.) *& proinde fractio oriens in reductione ad decimalem cuiuſcumque ordinis ſemper minor eſt fractione, cuius denominator ſit articulus illius ordinis, & numerator.* 1. *Sic* $\frac{2}{7}$ *in* cor. *precedenti valent* $\frac{2}{7}$ 0.000000001, *& ipſa hac decimali minores ſunt.*

Cor. 3. REducendo igitur fractionem ex diviſione integrorum prodeuntem ad decimales, ſeu quod perinde eſt, adjiciendo ad dexteram dividendi cyphras, ſeu 0, & diviſionem proſequendo (*juxta ſch.* 1.) quotus ad verum quantunlibet approximatur, ita ut eius defectus ſit minor qualibet minima decimali particula. Sic ſi quotum ex 17 per 7 deſideres, ita vero propinquum, ut ab eo non deficiat ne una quidem millies millioneſima, obtento quoto 2, fractio $\frac{3}{7}$ reducatur ad decimalem, infra quam defectus exiſtere debet, ut in *cor. prae.* huiuſmodi proximus ad verum quotus erit 2. 428571428. Qui a vero deficiet $\frac{4}{7}$ millies millioneſimæ h. e. ne una quidem ſemimillies millioneſima.

Cor. 4. SImiliter ſi numerator fractionis cuiuſlibet multiplicetur toties per ſex, & facto totidem ad dexteram adiciantur cyphræ ſeu 0, quot unitates habet numerus exponens ordinem ſexageſimalis, ad quam fractionem datam reducere volueris, & numerum inde orientem dividas per factionis datæ denominatorem, quotus erit

erit numerator ſexageſimalis, ad quam reducere quæris (*vid cor.* 2.) atque hic eadem notanda occurrunt, quæ in *ſch. præced. & eius cor.* notavimus.

Def. 27. SI in reductione fractionis ad decimalem, vel ſexageſimalem, nulla oriatur nova fractio, tunc decimalis vel ſexageſimalis inventa attingit accurate valorem datæ; ex quo *exacta* vocatur; ſi autem nova fractio oriatur, tum decimalis, & ſexageſimalis ad valorem verum datæ fractionis prope accedit, proindeque dicitur *approximans*. In fractione illa, quæ exponit defectum decimalis a vero valore, ſi numerator eſt minor medietate denominatoris, defectus erit infra medietatem unitatis, ad quam refertur nota ultima fractionis decimalis, vel ſexageſimalis: ſi medietati denominatoris numerator æquatur, defectus erit medietas eius unitatis, ſi dimidio denominatore fuerit maior, defectus erit illa eadem unitate maior (*th.* 20.): in ultimo horum caſuum conſultum eſt ultimæ decimalis, aut ſexageſimalis notæ adijcere unitatem, & loco illius fractionis ſubſtituere aliam ſub ſigno —, quæ eodem gaudeat denominatore, ſed loco numeratoris habeat exceſſum denominatoris ſupra ipſum numeratorem. Tunc enim fractio decimalis verum valorem excedet, ſed exceſſu infra medietatem unitatis, ad quam refertur ultima nota, exiſtente. Sic loco $0.02 + \frac{6}{7}$ præſtat ſubſtituere $0.03 - \frac{1}{7}$. Nam 0. 0 3 ex-

cedet valorem verum, ſed exceſſus longe minor erit defectu primæ 0. 0 2.

Prob. 22. *F*Ractiones decimales addere, ſubtrahere, multiplicare, dividere.*

Reſol. REducantur ad formam integrorum (*prob.* 5.) inde addantur, ſubtrahantur, multiplicentur, dividantur eadem penitus regula, qua integra ipſa. *d.f.* e. g. 8. 9075 + 88. 70565 + 0. 3040 = 97. 91715. & 8. 9075 − 0. 0088 = 8. 8987. & 8. 345 in 3. 34 = 27. 87230 & quotus ex 6. 4048 per 0. 004 = 1601. 2

Obſerva tamen in multiplicatione locum integrorum ad ſiniſtram promoveri toties, quot notas habent poſt integra multiplicator, & multiplicandum, in diviſione vero locum integrorum in quoto tot loca habere poſt ſe ad dexteram, quot unitates remanent ſubtracto numero notarum poſt integra in dividente ex numero notarum poſt integra in dividendo.

Dem. FRactiones adduntur, & ſubtrahuntur reducendo primum eas ad idem nomen, deinde numeratores ipſarum addendo, vel ſubtrahendo (*Prob.* 18.). Porro decimales ad formam integrorum reducuntur, reticendo earum denominatores, & numeratorum notas ita diſponendo, ut ex loco ipſarum innoteſcat denominator earum cuilibet conveniens (*Prob.* 5.) ut proinde notæ eundem locum occupantes eodem gaudeant denominatore, & perinde ac in integris a dextra ad ſiniſtram progredientes valorem obtineant decuplum. Igitur ſi numeri, qui exprimunt

primunt decimales ad formam integrorum reductas, addantur, vel ſubtrahantur eodem modo, quo ipſa integra, ſumma, vel reſiduum erit numerus reſpondens ſummæ, vel differentiæ decimalium ipſarum ad formam integri reductæ. Similiter fractiones multiplicantur ducendo in ſe invicem numeratores, ac denominatores (*prob.* 19.) & denominator in decimalibus eſt 1. cum aliquot ad dedexteram cyphris, ſeu o (*def.* 21.) Igitur factum ex denominatoribus earum erit 1 cum tot ad dexteram cyphris, ſeu o, quot earum habentur in multiplicatoris, & multiplicandi denominatoribus (*cor.* 2. *prob.* 10.) ſeu quot ſunt in utroque notæ poſt integra. Igitur, ut factum reducatur ad formam integri, tot notæ dextimæ ſeparari debent in facto numeratorum, quot ſimul notas habent poſt integra multiplicator, & multiplicandum, ut ſic notæ reſiduæ deſignent integra (*prob.* 5.]

Sit denique decimalis $\frac{N}{D}$ dividenda per $\frac{n}{d}$, erit quotus $\frac{N}{n} \cdot \frac{d}{D}$ (*prb.* 19.) = $\frac{N}{n} : \frac{D}{d}$ (*Prob. cit.*) h. e. quotus eſt fractio, cuius numerator eſt quotus emergens ex diviſione numeratoris dividendæ per numeratorem dividentis, denominator vero quotus emergens ex diviſione denominatoris dividendæ per denominatorem dividentis. Quoniam ergo quotus ſecundus eſt unitas cum tot cyphris, ſeu o, quot ſunt in denominatore dividendo ſubtractis iis, quæ ſunt in denominatore dividente. (*cor.* 1. *prob.* 11. & *def.* 21.] Igitur quoto primo tamquam numeratori

ſubſcribenda eſt 1 cum his cyphris, tamquam denominator. Quæ decimalis, ſi ad formam integri reducatur (*prob.* 5.] locus integrorum habebitur poſt tot notas ad dexteram, quot ſunt cyphræ in denominatore dividendæ demptis iis, quæ ſunt in denominatore dividentis, ſeu, quod perinde eſt, poſt tot notas, quot habentur poſt integra in fractione dividenda, tot ſubtractis, quot habentur poſt integra in dividente.

Sch. *Hic non inanis opera erit, ſi de decimalibus approximantibus nonnulla notemus.*

1. *Si decimales addendæ fuerint approximantes, nota ultima ſummæ erit incerta*, ex def. 27. *Attamen poteſt ultima nota ad ſummum integra deficere* 1. *pro ſingulis binis approximantibus defectivis, vel excedere pro binis approximantibus per exceſſum: defectus enim, vel exceſſus unius ad ſummum unitatis notæ ultimæ medietatem poteſt adæquare.* (def. 27.) *Unde ſi in datis numerentur approximantes utriuſque ſpeciei, dignoſcentur omnes unitates, quæ ad ſummum in nota ultima deficiunt, aut per quas excedit.* v. g. *Si addendæ approximantes fuerint* 12, *ex quibus* 8 *ſint defective*, 4 *excedentes, error in ultima nota ſummæ ad ſummum conſiſtere poterit in duarum unitatum defectu. At ſi ipſæ approximantes aliæ ſint unius, alteræ alterius gradus, tunc non ſolum incerta erit ultima nota, ſed illæ etiam, quæ in ſumma referuntur ad illum gradum* v, g. *ſi fractiones approximantes fuerint* 16 *ex quibus octo ſint ſexti gradus*, 4 *quinti gradus*, 2 *tertii*, & 2 *ſecundi, in-*

di, incertæ erunt in ſumma nota ſexta, ſeu prima ad dexteram, quinta poſt integra, ſeu ſecunda a dextera, nota tertia poſt integra, ſeu quarta a dextera, & ſecunda poſt integra, ſeu quinta a dextera, de quibus erroribus ſingulis juxta regulam paulo ante datam judicare poteris.

2. *In reſiduo autem ſi ſubtrahenda, & minuenda ſint ambæ approximantes per defectum, vel per exceſſum, quoniam defectus, vel exceſſus major medietatem unitatis notæ ultimæ ad ſummum poteſt attingere, idem minore mulctatus infra eam medietatem eſſe debebit, nota igitur ultima reſidui erit vero valori propinquior, quam alterutra, vel utraque ultima nota datarum, ut proinde in reſiduo notæ omnes certæ ſint. At fieri tamen poteſt, ut ſi datæ deficiant, reſiduum excedat, & contra; tunc cum ſcilicet defectus, vel exceſſus ſubtrahendæ eſt major defectu, vel exceſſu minuendæ. Sic, ſi ex* 2.04 $+\frac{2}{5}$ *ſubtrahi debeant* 0.15 $+\frac{5}{7}$ *facta decimalium ſubtractione reſiduum erit* 1.89 *ſubtractìs autem autem defectibus reſiduum erit* $-\frac{6}{35}$, *quod cum ſit ſub ſigno* $-$, *oſtendit reſiduum inuentum excedere, & cum ſit minus tum* $\frac{2}{5}$, *tum* $\frac{4}{7}$, *etiam ex eo colligitur a veritate ipſum minus, quam datas diſtare. At ſi altera fuerit approximans per defectum, altera per exceſſum, tum ſubtractio errorum ſub diverſis ſignis fit ipſos colligendo in unam*

ſummam, (prob. 7. & 9.) *quæ ad ſummum unitatem notæ ultimi reſidui poteſt adæquare, unde in hoc caſu nota ultima reſidui certa non eſt, ſed in unitate integra ad ſummum errorem admittere poteſt, & quidem in defectu, ſi contra vero minuenda excedat, ſubtrahenda deficiat, in exceſſu. Sit enim defectus ſummus minuendæ* $\frac{1}{2}$, *ſit exceſſus ſummus ſubtrahendæ* $\frac{1}{2}$ (*def.* 27.) *primus quidem erit ſub ſigno* +, *ſecundus ſub ſigno* −, *& ſubtracto ſecundo ex primo reſiduum eſt* [*th.* 12.] $\frac{2}{2}$ (*th.* 20.) = + 1. *Quodſi exceſſus minuendæ ſummus ſit* $\frac{1}{2}$, *& defectus ſubtrahendæ ſummus pariter* $\frac{1}{2}$, *ille ſub ſigno* −, *hic ſub ſigno* +, (*def.* 27.) *ſubtractione facta reſiduum erit* − $\frac{2}{2}$ = − 1. [*th.* 12. *&* 20.]

3 *In multiplicatione, ſi multiplicanda ſit fractio decimalis approximans, facta ex ſingulis multiplicatoris notis in dextimam multiplicandi erunt incerta, quæ cum ordinatim per unum locum ad ſiniſtram promoveantur* (prob 10.) *tot in producto notæ a dextera ad ſiniſtram erunt incertæ, quot ſunt notæ multiplicatoris; & cum aliquo in caſu factum ex aliqua multiplicatoris nota conſtare poſſit duabus notis ambabus incertis, ut ſi defectus fuerit* $\frac{2}{4}$ *& nota multiplicatoris* 7, *& dextima multiplicandi nota pariter* 7, *in facto una adhuc*

hinc, propter dictas, nota incerta eſſe poterit, unde numerus notarum incertarum in facto ſuperat unitate numerum notarum in multiplicatore exacto. Quodſi exactus fuerit multiplicandus, & approximans multiplicans, cum hic multiplicandus, ille multiplicans fieri poſſit, (th. 15.) *patet etiam hic notas incertas facti ſuperare debere unitate numerum notarum in multiplicanda exacta; unde in genere, ſi factor alteruter ſit approximans, numerus notarum incertarum in facto ſemper ſuperet numerum notarum factoris accurati. Cum porro factor ex nota qualibet multiplicatoris in dextimam multiplicandi, ſit ipſa dextima toties ſibi addita, quoties nota multiplicatoris continet* 1 (cor. 1. def. 24.), *ex numero ſecundo huius Scholis de maximo errore notarum incertarum judicium proferre poteris. Si factor uterque fuerit approximans, factor pluribus conſtans notis etiam ſi factor alter eſſet accuratus, producet in facto numerum notarum incertarum unitate majorem numero notarum, factor autem conſtans paucioribus notis aliquibus ex iis notis facti, quæ jam incertæ ſunt, propter factorem primum, ſuam quoq; dubietatem participabit, ſed notarum incertarum numerum non augebit* (ex caſ. 1. num. huius 3.) *unde, ſi factor uterque fuerit approximans, numerus notarum incertarum in facto unitate ſuperabit numerum notarum, facti maioris. Quodſi alter ſit approximans per defectum alter per exceſſum, patet errorem in facto provenientem ex uno factore, vel quoad partem, vel etiam quoad totum tolli poſſe per eum, qui provenit ex altero. Vereor ne quod monet Wolfius*

§. 377 *ad corrigendum factum, quando factor tantummodo unus eſt incertus, & numerator defectus æquatur notæ dextimæ factoris accurati, vera non ſint. Ait enim tot unitates adjici facto ex ſingulis notis factoris accurati in dextimam approximantis (addendum eſſet* defectivæ; *ſi enim excederet potius hæ unitates eſſent demendæ) quot decades involvit factum ipſum. Sic in ſuo exemplo* 0. 6666 + 6. 8 *facto* 48 *ex* 6 *dextima nota multiplicandi approximantis per defectum, ut innuit ſignum + poſt ipſum adiectum, in* 8 *dextimam multiplicatoris adjicit, pro* 4 *decadibus in* 48, *quatuor unitates, & loco* 48 *uſurpat* 52. *Sed id verum eſſet, ſi denominator defectus eſſet* 10, *quod quidem eſt impoſſibile, alias enim ipſe defectus eſſet decimalis, & multiplicanda improprie exprimeretur per approximantem* $0.6666 + \frac{6}{10}$ *ſed melius exponeretur per accuratam* 0. 66666. *Quod ſi denominator ſit minor denario, plures, ſi maior pauciores unitates adſcribendæ erunt prædictis factis. Sit* $\frac{6}{15}$ *factum ex* 8 *in* $\frac{6}{15}$ *erit* $3 + \frac{3}{15}$, *unde facto ex* 8 *in* 6 *dextimam multiplicandi notam adnumerandæ tantummodo eſſent tres unitates, quin tamen ultima nota certa evaderet.*

4. *Denique in diviſione, ſi dividenda fuerit approximans, dividens accurata in facto ex dividente in quotum (h. e. in ipſa dividenda th.* 15.) *numerus incertarum notarum ſuperabit unitate*

ſch.)

numerum notarum dividentis (p. 3. huius ſch.] *Cognitis autem notis incertis dividendæ facile agnoſces incertas quoti, ſi bene attenderis ad quoti notas, quæ prodeunt, quando dividens attingit notas dividendæ incertas, eæ enim incertæ erunt. Si dividens ſit approximans, & dividenda accurata, in facto ex dividente in quotum numerus notarum incertarum unitate ſuperabit numerum notarum dividentis, ſi plures ipſa, vel quoti, ſi plures iſte notas habuerit* (ex p. 3. huius ſch.] *& reſidua, quæ oriuntur, dum ex dividenda huiuſmodi factum ſucceſſive ſubtrahitur, erunt incerta, quo ipſo incertæ evadent notæ quoti prodeuntes dividente ad illa reſidua promota. Si dividenda, & dividens fuerint approximantes, reſidua ipſa ex duplici capite fient ambigua, eo quod nempe factum ambiguum ex quoto in dividentem ſubtrahitur ex ambigua dividenda, & notæ quoti prodeuntes, dividente ad illa reſidua promota, pariter ambiguæ erunt.*

Prob. 23. F*Ractiones ſexageſimales addere, ſubtrahere, multiplicare, dividere.*

Reſol. UBi ipſas ad integrorum formam reduxeris [*ſch prob.* 6.) numeròs, qui eundem locum, poſt integra occupant, ſimul adde, vel a ſe invicem ſubtrahe eodem modo, quo adduntur, vel ſubtrahuntur integra, hoc unice notato, ex locis ad dexteram ad loca ad ſiniſtram non transferri unitatem pro unaquaque decade, ſed ſolum pro ſingulis ſexagenarijs; &, ſi in ſubtractione ex loco a ſiniſtra ad proximum

ximum verſus dexteram tranſferenda ſit unitas, eam in hoc valere 60, quæ omnia manifeſta ſunt ex *ſch. Prob.* 5. Sic. 3. 4, 7, 45 + 12. 46, 50, + 0. 5 = 15. 55, 57, 45, & 12. 46, 50 — 3. 4, 7, 45 = 9. 42, 42, 15. In multiplicatione id unice notandum eam non fieri ducendo ſingulas notas unius in ſingulas alterius, & ordinatim facta ſubſcribendo, ut in decimalibus, ſed diſtinctis multiplicationibus prius inveniri debere factùm ex toto numero dextimi loci multiplicatoris in totum numerum, qui eſt in unoquoque loco multiplicandi, procedendo a dextera ad ſiniſtram, & ex factis ad dexteram ad facta ad ſiniſtram pro ſingulis ſexagenarijs unitatem eſſe transferendam, idemque efficiendo in numeris cæterorum multiplicatoris locorum, cujus quidem exceptionis cauſam deteximus in (*ſch. Prob.* 5.) Cum facta ex numeri totis diſtinctorum locorum poſſint eſſe numeri tribus, & quatuor notis conſtantes, in quibus non ita facile, & promptè videris, quot ſexagenaria contineant, quænam pars ipſorum ſcribenda ſit, & quot unitates ex ipſis ad ſiniſtram ſint promovendæ, non levi adiumento erit in multiplicatione Tabula poſt reſolutionem hanc apponenda, in qua exprimuntur facta ex 60 in omnes numeros infra ipſum: ſi enim in hac Tabula quæſiveris factum quodlibet in multiplicatione inventum vel numerum toto facto proxime minorem, ad latus ejus numeri habebis numerum unitatum transferendum, & ſi ex eo ſubtraxeris numerum Tabulæ, reſiduum erit pars facti conſcribenda.

benda. *v. g.* ducendo 54 in 59 factum eſt 31. 86, quod quidem in Tabula deſideratur, ſed numerus proxime minor eſt 3180, cui ad ſiniſtram reſpondet 53; loco ergo illius facti ſcribitur 6 differentia inter 3186, & 3180, & ad ſequens factum transferuntur 53 unitates. Diviſio denique ſexageſimalium fit eadem ratione, qua diviſio decimalium; hoc unice notato, quod cum in illis unica nota conſtent articuli ſinguli, unica nota, aut ad ſummum duæ dividendæ dividuntur per unicam dividentis, & quotus ſemper uuica nota, conſtans in ſingulis actibus diviſionis aſſumitur, & unitas in illis ad ſiniſtram valet decem in loco proximo ad dexteram, ſed in iſtis articuli conſtare poſſunt duabus notis, & proinde non numquam uno ictu duæ ſimul notæ, vel etiam tres per duas, aut per unam ſunt dividendæ, in iſtis unitas in loco ſiniſtro valet 60 in proximo dextero, & quotus in iſtis duabus notis conſtans aſſumi poteſt, & in illis multiplicationes fient eodem pacto, ac in integris, ſed in iſtis fiunt regula ſuperius tradita. Tum in facto, tum in quoto numerus locorum poſt integra determinatur, ut in decimalibus,

Dem. Eſt prorſus eadem cum demoſtractione prob. præcedentis, ita ut illa fere quoad verba hic tranſcribi poſſit; quod ſi attendas ad id, quod habent commune eſſentiæ harum fractionum, quod facile dignoſcitur, ex ijs, quæ tradita ſunt in Cap. 2. ontologiæ quodammodo huiuſmodi prob. demonſtrare poteris.

Digitized by Google

Tabula pro Arithmetica ſexageſimalium, in qua exhibentur facta ex 60 in omnes ſub ipſo 60

1	60	13	780	25	1500	37	2220	49	2940
2	120	14	840	26	2560	38	2280	50	3000
3	180	15	900	27	1620	39	2340	51	3060
4	240	16	960	28	1680	40	2400	52	3120
5	300	17	1020	29	1740	41	2460	53	3180
6	360	18	1080	30	1800	42	2520	54	3240
7	420	19	1140	31	1860	43	2580	55	3300
8	480	20	1200	32	1920	44	2640	56	3360
9	540	21	1260	33	1980	45	2700	57	3420
10	600	22	1320	34	2040	46	2760	58	3480
11	660	23	1380	35	2100	47	2820	59	3540
12	720	24	1440	36	2160	48	2880	60	3600

Sch. *Fieri quidem poteſt, ut numerus dividendus tum in decimalibus, tum in ſexageſimalibus diviſore minor ſit, & eo in caſu diviſio fieri nequeat. Sed in decimalibus ſalvo valore fractionis, cui ad formam integri reductæ reſpondet numerus dividendus, cyphræ quotcumque ipſi dividendo ad dexteram adjici poſſunt, ut diviſore maior evadat, & diviſio actu peragi*

peragi poſſit; dico ſalvo valore; notæ enim dividendi adiectis cyphris ad ſiniſtram promoventur, & eo ipſo intelliguntur [prob. 5] *denominatori totidem cyphræ adiectæ; quo ipſo valor decimalis minime immutatur. In ſexageſimalibus vero pari propemodum facilitate dividendus numerus, ſi ſit dividente minor, redditur maior, non ipſum quidem multiplicando per* 10 *aut eius multiplos, ut fit in decimalibus addendo ipſi cyphras, ſeu* 0 (Cor. Pob. 2) *ſed per* 60 (ſch. prob, 5) *aut eius multiplos, & facto decenter in articulos diſtributo* (p. 3. prob. hujus.)

CAP. IV.

DE COMPARATIONE NUMERORUM

ARTICULUS I.

De Ratione, Proportione, & Progreſſione Arithmetica.

Def. 28. Comparatio numerorum ſecundum differentiam dicitur *ratio arithmetica*. Jdentitas duarum hujuſmodi rationum dicitur *arithmetica proportio*, diſcreta quidem, ſi numeri ſecundum differentiam comparati ſint quatuor diverſi, continua vero, ſi ſecundus ſit terminus *ad quem* in prima ratione, & terminus *a quo* in ſecunda. Sic $a, a \mp d$ & $c, c \mp d$ ſunt *arithme-*

arithmetice, *&* *diſcretim* proportionales, a, $a \mp d$, $a \mp 2\,d$ ſunt arithmetice, & continue proportionales, & in numeris exemplum diſcretæ proportionis eſt 2, 5, 7, 10. continuæ vero 2, 5, 8; Series demum continue æquidifferentium, ſeu cuntinue arithmetice proportionalium eſt *progreſſio arithmetica*.

Sch. I. *SI in una ratione arithmetica differentia ſit poſitiva, in altera negativa, huiuſmodi differentiæ erunt heterogeneæ* (n. 3. prol.) *& rationes non dicentur eadem. Sic* 4. 2, 8. 10. *non habent eandem rationem arithmeticam.*

Cor. I SIt differentia d, & primus terminus a, erit ſecundus $a \mp d$ (*def.* 22. *vel* 23.) dato igitur primo termino invenitur ſecundus, ſi primo adijciatur differentia ſub ſigno $+$, ubi termini creſcere debent, ſub ſigno $-$, ubi deſcreſcere.

Cor. 2. IN prog. ergo arith. erit 2.us $a \mp d$, 3.us $a \mp 2\,d$, 4.us $a \mp 3\,d$, 5.us $a \mp 4\,d$ *&c.* &, ſi numerus terminorum ſit n, erit ultimus $a \mp (n - 1)\,d = a \mp n\,d \pm d$.

Sch. 2. *SIgnum* $+$ *ſpectat ad creſcentem*, $-$ *ad deſcreſcentem rationem. Quia, quæ oſtenſa ſunt, utrique conveniunt, idcirco utrumque appoſuimus. Utriqne etiam rationi conveniunt, quæ ſequntnr; ſed evitandæ confuſionis cauſa unico, nempe* $+$ *utemur. Qui demonſtrationes ſequentes ad rationem decreſcentem applicare cupiunt, ſigna afficientia ipſam* d *in contraria mutent.*

Digitized by Google

Sch. 3. N*Ota in progreſſione numerum ipſi* d *præfixum indicare diſtantiam termini, ad quem ſpectat, a primo, & differentiam inter duos numeros ipſi* d *prefixos in duobus terminis indicare diſtantiam ipſorum. Sic terminus* a + 7 d *duobus locis diſtat ab* a + 5 d. *Porro cum coefficiens ipſius* d *indicet quoties pro dato termino adiicienda ſit* d *ipſi* a, *terminus poſterior cum anteriore convenit quoad primum terminum, & quoad minorem numerum differentiarum, diſcrepat quoad exceſſum numeri majoris earumdem ſupra minorem.* (k. in Prol.) *Sic* a + 7 d *cum* a + 2d *convenit quoad* a, *& quo ad* 2 d, *diſcrepat in* 5d. *Itaque differentia termini poſterioris ab anteriori habetur, ſi numerus exponens diſtantiam ducatur in* d *differentiam primi a ſecundo.*

Cor. 3. SI inter duos datos quæratur quotcumque medii Arithmetice proportionales, numerus mediorum quæſitorum indicabit diſtantiam ultimi mediorum a primo datorum. Sit itaque primus datorum a, alter b, numerus mediorum n, erit (*ſch.* 3.) $b - a = (n + 1)\,d$, & (*th.* 19.) $\frac{b-a}{n+1} = d$. Si ergo differentia datorum dividatur per numerum mediorum quæſitorum, 1. auctum, quotus erit differentia primi a ſecundo, qua data (*cor.* 2.) reliqui medii inuenientur.

Cor. 4. ULtimus $u = a + (n - 1)\,d$ (*ſch.* 3.) & (*th.* 13.) $u - a = (n - 1)\,d$; adeoque $\frac{u-a}{n-1} = d$ [*th.* 19.]; ex qua formula dato primo, & ultimo cum

mo cum numero terminorum invenitur differentia.

Cor. 5. DAtis autem u, a, & d invenitur n ſimili calculo. Nimirum $u - a = [n - 1] d$ (*cor.* 4.) ergo (*th.* 19.) $\frac{u - a}{d} = n - 1$, & (*th.* 10.) $\frac{u - a}{d} + 1 = n$.

Cor 6 DAtis a, & d, ſi quæratur, quam ſedem occupet in ſerie terminus ad eam ſpectans *v. g.* b; ſi ponatur ſeries terminari in b, b fungetur vice ultimi u. Si ergo loco u ſubſtituatur b in formula exponente n [*cor.* 5.] n exponet ſedem ab ipſo b occupatam. Pari modo ſi quæratur quiſnam numerus occupet ſedem datam m, ſi ponatur ſeries terminari in termino $m$mo; erit m numerus terminorum, & numerus quæſitus erit terminus ultimus; quare ſi in formula (*cor.* 4.) $u = a + (n - 1) d$, loco n ſubſtituatur m, habebitur terminus occupans locum datum, $m$mum

Cor. 7. SI primus eſt a, erit ſumma extremorum $a + u$. eſt vero $u = a + (n - 1)\ d$ (*ſch.* 3.] adeoque $a + u = 2a + [n - 1] d$, & $u - a = 2a + (n - 1) d - 2a$, (*th.* 13.) $= (n - 1) d$. (*cor.* 4. *def.* 23.)

Cor. 8. IN proportione Arithmetica, ſi primus terminus ſit a, & differentia d; erit etiam differentia 3.ⁱ a 4.ᵒ d, & ſi tertius ſit c, erit 4.us $c + d$, 2.us vero $a + d$ (*cor.* 1.) ſumma vero extremorum $a + c + d$ (*prob.* 8.) Eſt vero etiam ſumma mediorum

$a +$

$a + d + c$ (*prob.* 8.) quare cum ſit $a + c + d = a + d + c$ (*ſch.* 1. *def.* 23.) ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum.

Cor. 9. QUodſi proportio fuerit cotinua ſecundus terminus vices geret duorum terminorum mediorum, & ſumma mediorum erit dupla ſecundi; in proportione igitur Arithmetica continua ſumma extremorum eſt dupla medij (*cor*; 8.]

Cor. 10. SIt inproportione diſcreta primus a, 2.dus b, 3.us c, 4.us d, erit [*cor.* 8.] $a + d = b + c$. hinc $a + d - c = b$, $a + d - b = c$, $b + c - d = a$, $b + a - c = d$ [*th.* 13.] Sir in continua 1.us a, 2.dus b, 3.us c, erit (*cor.* 9.) $a + c = 2\,b$, $\frac{a + c}{2} = b$ [*th.* 19.) $2\,b - c = a$; $2\,b - a = c$. (*th.* 18. & 13.)

Th. 23. *IN progreſſione Arithmetica termini æquidiſtantes ſunt Arithmetice proportionales.*

Dem. TErminorum æquidiſtantium in progreſſione Arithmetica differentia eſt factum ex numero exponente diſtantiam in d (*ſch.*3.*def.*28.] cum igitur huiuſmodi exponens diſtantiæ (*hyp.*) idem ſit, & eadem pariter d [*def.* 28.] erunt termini æqujdiſtantes etiam æquidifferentes, ſeu Arithmetice proportionales (*def.* 28.) *q. e. d.*

Cor. 1. SUmma ergo extremorum progr. Arith. æquatur ſummæ mediorum ab extremis æquidiſtantium, & ſi numerus

Digitized by Google

terminorum ſit impar, duplo medii. (*cor.* 8. & 9. *def.* 28.)

Cor. 2. SUmma totius ſeriei eſt ſumma extremorum toties ſumpta, quoties ab extremis ad medium procedendo duo termini aſſumi poſſunt [*cor.* 1.) h. e. productum ex ſumma extremorum in dimidium numerum terminorum. (*def.* 24.)

Cor. 3. SI ſumma $ſ$, primus a, ultimus u, erit (*cor.* 2.) $ſ = [a + u] \frac{n}{2}$. Hinc $\frac{ſ}{a+u} = \frac{n}{2}$, & $\frac{ſ}{\frac{n}{2}} = a + u$ (*th.* 19.), & $\frac{ſ}{\frac{n}{2}} - a = u$, $\frac{ſ}{\frac{n}{2}} - u = a$ (*th.* 13.)

Cor. 4. $a + u = 2a + d(n - 1.)$ (*cor.* 7. *def.* 28.) ergo $ſ = \frac{2an + (n^2 - n)d}{2}$ [*cor.* 3.) $= \frac{2an + n^2 d - nd}{2}$ (*prob.* 10.)

Cor. 5. QUoniam $u = a + (n - 1)d$ [*cor.* 7. *def.* 28.] erit $u - (n - 1)d = a$ [*th.* 13.] & $a + u = 2u - (n - 1)d$, (*th.* 10.] ergo $ſ = \frac{2an + n2d - nd}{2}$ (*cor.* 2.) $= \frac{2un - n^2 d + nd}{2}$ (*prob.* 10.)

Cor. 6. ERgo (*f. in Prol.*) $\frac{2an + n2d - nd}{2} = \frac{2un - n^2 d + nd}{2}$, proinde etiam $2an + n2d - nd = 2un - n2d + nd$. [*th.* 18.

Sch.

Digitized by Google

Sch. *EX his formulis aliæ adhuc erui poſſent calculo facili, ſed hactenus erutæ ſolvendis circa progreſſiones Arithmeticas problematis ſufficiunt.*

ARTICULUS II.

De Rationibus in ſe ſpectatis, & de variis earundem ſpeciebus.

Def. 29. EA quantitatum relatio, vel comparatio, per quam æquales, vel dato modo inæquales dicuntur, ut jam vidjmus in *n.* 8. *Prol.* eſt earumdem *Ratio*: quantitas, quæ refertur *antecedens*, & ea, ad quam antecedens refertur, *conſequens* adpellatur: antecedens, & conſequens communi nomine dicuntur *Termini Rationis*; in pluribus porro rationibus antecedentia antecedentibus, conſequentia conſequentibus *homologa* ſunt.

Cor. I. ÆQualium unum alterum ſemel determinate continet (*g. in. Prol.* & inæqualium quodlibet vel aliud continet, vel in alio continetur (*k. & l. in Prol.*) ita ut, ſi ipſa inæqualia determinentur, & illud ex ipſis, quod pro unitate ſumitur, determinetur eo ipſo modus, quo unum aliud continet (*cor. 2. def.* 1.) quamobrem cuilibet rationum generi reſpondet determinatus, quo termini ſe continent, modus.

Cor 2. DIfferens modus, quo quantitas aliam continet (*def.* 12) eſt di-

verſa ipsarum multiplicitas, vel ſubmultiplicitas, adeoque (*cor.* 1) rationi cuicumque reſpondet determinata antecedentis reſpectu conſequentis multiplicitas, vel ſubmultiplicitas.

Cor. 3. IN diviſione quotus exponit multiplicitatem, aut ſubmultiplicitatem dividendi reſpectu diviſoris (*cor.* 2 *def.* 25.) qui proinde (*cor.* 1) exponit etiam rationem antecedentis ad conſequens.

Cor. 4. Adeoque ſi antecedens ſit *a*, conſequens *b*, ratio *a* ad *b* exponetur per quotum ex diviſione *a* per *b*, h. e. huiuſmodi rationis exponens erit *a* : *b* (*def.* 25.) ſeu $\frac{a}{b}$ (*ſch.* 1. *def. cit.*) ſeu hujus fractionis valor.

Cor. 5. IGitur exponens rationis coincidit cum exponente multiplicitatis, aut ſubmultiplicitatis (*cor.* 1. 2 *&* *cor.* 2 *def.* 25)

Cor. 6. ALgorithmus proinde rationum coincidit cum algorithmo fractionum, ſeu eæ eodem modo, ac fractiones, adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur, dividuntur. (*cor.* 4)

Cor. 7. ANtecedens eſt factum ex exponente in conſequens (1. *p. th.* 17) quodſi dividatur per exponentem, habebitur conſequens, ſi per conſequens, quotus erit exponens, (2. *p. th.* 17) & ſi exponens ducatur in conſequens, habebitur antecedens.

Sch. E *Quidem non minus recte exponitur ratio per quotum ex diviſione conſequentis per antecedens. Nihilominus exponens ſemper,*

ſemper nobis erit quotus ex diviſione antecedentis per conſequens, quotus autem ex diviſione termini maioris per minorem, ſive maior ſit antecedens, ſive non, vocabitur Denominator rationis.

Def. 30. HInc dignoſcitur quandonam rationes dicendæ ſint *æquales*, vel, ſi mavis, *eædem*, aut *ſimiles*, quando *inæquales*, vel, ſi mavis, *diverſæ*, aut *diſſimiles*; tum ſcilicet *æquales* dicuntur, cum exponentes habent æquales, *inæquales*, cum ſecus, in ſpecie illa *maior*, quæ gaudet exponente *maiore*, *minor*, quæ minore.

Cor. I. EXponens rationis denominat multiplicitatem, vel ſubmultiplicitatem antecedentis reſpectu conſequentis [*cor.* 2. *def.* 25.] quodſi ſimplum conſideretur, ut pars, idem exponens eam partem denominat [*ſch. def.* 13.] in rationibus ergo iiſdem antecedentia conſequentium, vel conſequentia antecedentium ſunt partes ſimiles.

Sch. *CErte in ratione æqualitatis, nec antecedens conſequentis, nec conſequens antecedentis pars proprie dici poteſt. Veruntamen, ſi fuerint duæ rationes æqualitatis, utriuſque exponens erit* 1; *& ſi utriuſque antecedens, ad inſtar partis, quæ ſcilicet ſemel ſumpta totum adæquet, conſideretur, adhuc verum erit eas partes eodem pollere denominatore, & proinde ſimiles eſſe.*

Cor. 2. SI factum dividitur per factorum alterutrum, quotus eſt factor alter (*th.* 17.) ſed ſi factor alter per 1 dividatur, quotus eſt ipſe alter factor (*cor.* 4. *def.* 25.)

 igitur

Igitur rationes 1. ad factorum unum, & factoris alterius ad factum ſunt eædem,

Cor. 3. EX *th.* 17., *&* *cor. cit.* etiam patet rationem 1 ad quotum eandem eſſe cum ratione diviſoris ad dividendum.

Cor. 4. Ratio, quam habet antecedens ad conſequens, eſt eadem cum ratione exponentis ad 1 (*cor-* 3 *&* *cor.* 2 *def.* 25)

Cor. 5. IN fractione numerator ſe habet ut dividendus, denominator ut dividens, & ipſa fractio ut quotus. (*th.* 20.) eſt ergo in omni fractione numerator ad denominatorem, uti fractio ad 1. (*cor.* 3.)

Cor. 6. SI dividendus, & diviſor per idem multiplicentur, aut dividantur, quotus idem manet (*cor.* 6. *&* 7. *th.* 17.] ergo ſi antecedens, & conſequens multiplicentur, vel dividantur per idem, ratio manet eadem, ſcilicet. (*cor.* 2. *def.*29. *& cor.*2. *def.* 25.] multiplicia, vel ſubmultiplicia antecedentium ad æque multiplicia, vel ſubmultiplicia conſequentium eandem rationem habent, ac ipſa antecedentia ad ſua conſequentia.

Cor. 7. EX *th.* 19. inferes idem ad æqualia, æqualia ad idem, æqualia ad æqualia eandem rationem habere; ut ex *Monito infra ponendo*, ad quæ idem, vel æqualia habent eandem rationem, & quæ ad idem, vel ad æqualia habent eandem rationem, eſſe æqualia; ex *th.* 19. maius ad idem maiorem habere rationem, quam minus, maius ad unum æqualium habere maiorem rationem, quam minus ad alterum

Digitized by Google

rum, & ex *p.* 2. *th.* 19. idem ad majus minorem habere rationem, quam ad minus, & æqualium unum ad maius, minorem habere rationem quam alterum ad minus; & ex *Monito cit.* quod ad idem habet maiorem rationem, quam alterum ad æqualium alterum, id altero eſſe maius; & ad quod idem, vel unum æqualium habet minorem rationem, id itidem eſſe maius.

Cor. 8. SI fuerint duæ rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ quarum prima ſit altera maior, cum $\frac{a}{b}$ minuatur creſcente eius denominatore, eodem interim manente numeratore, vel decreſcente numeratore eodem interim manente denominatore, & $\frac{c}{d}$ augeatur contraria ratione decreſcente ſcilicet denominatore, & eodem interjm manente numeratore, vel hoc creſcente, & illo interim eodem manente (*cor.* 1. *th.* 20.) ſi ratio major æquanda ſit minori, id fiet, vel minuendo antecedens ipſius, vel augendo ipſius conſequens, vel augendo antecedens minoris, vel ejus conſequens minuendo.

Cor. 9. SI duo quoti eidem tertio, vel æqualibus ſunt æquales, inter ſe æquantur. (*f. in Prol.*) Quotus uno æqualium major, vel minor, etiam major, vel minor eſt altero, & majore maior multo major eſt minore, minore minor multo minor eſt maiore (*o. & p. in Prol.*) ergo ſi duæ rationes eidem tertiæ, vel duabus æqualibus æquantur, inter ſe etiam æquales erunt, & ratio una æqualium maior, vel minor, etiam

 major

maior, vel minor eſt altera, & maior ratione maiore multo maior eſt minore, minor minore multo minor eſt maiore.

MONITUM.

IN gratiam eorum, qui in perpendendis demonſtrationibus acumine utuntur, nonnulla hic ut adjiciam opus eſt. Alicubi in Art: 2.do *, & ſequentibus cap. III. & in nonnullis corollarjis hujus Articuli ſupponuntur principia quædam, quæ nullibi a nobis demonſtrata ſunt, quamvis facile a quocumque concedantur; quod quidem non parum officit ei propoſito meo, quod in prolegomenis expoſui. Hujuſmodi principia ſunt inverſiones theor*: 10. 11. 13. 14. 18. 19. *Unam, vel alteram hic demonſtrabo; cæterarum demonſtratio ad exemplum iſtarum facile a quocumque excogitabitur*. 1.° *ergo, ſi ſummæ æquales prodeunt addendo ipſis* a, *&* b *idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *vel ſi æquales prodeunt differentiæ ſubtrahendo idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *dico* $a = b$. *Nam* (hyp.) $a \mp c = b \mp c$, *vel* $a \mp c = a \mp d$. *Ergo* [th. 13. vel 10.) $a = b$. *Sicuti hic inverſioni th*: 10, *inſervit th*: 13. *& contra, ita inverſioni* 11. *inſervit* 14. *& contra, uti facile videre poteſt, qui vel levi attentione utatur*. 2.do *, ſi* $ac = bc$, *vel* (poſita $c = d$] *ſi* $ac = bd$, *aut etiam ſi* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, *aut* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, *dico* $a = b$. *Quoniam enim* [hyp.) $ac = bc$, *aut* $ac = bd$; *ergo* (th: 19.) $a = b$, *&* *quoni-*

quoniam $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, *aut* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, *ergo* (th. 18.) a = b. *Cæteræ partes horum theorematum juxta ea, quæ ſuperius innuimus, facili etiam negotio invertuntur. Ii, ad quos præſens monitum dirigitur, intelligent, licet id hic non oſtendam, quæ hic demonſtrata ſunt, nullo modo pendere ab ijs, quæ eadem ſupponunt; & ad hunc locum non fuiſſe tranſlata ob defectum principiorum neceſſariorum ad ea demonſtranda in jis locis, quæ in methodo noſtra naturali expoſtulantur. Quodſi quis roget, cur jis in locis non fuerint expoſita, is ſciat ſero me agnoviſſe hæc omiſſa fuiſſe a typothetis, propterea quod ipſis exciderit, aut, neſcio quomodo, evanuerit pagina, in qua hæc habebantur.*

Def. 31. SI exponens eſt 1, antecedens æquatur conſequenti, & ratio dicitur *æqualitatis*; ſi exponens eſt major 1, antecedens eſt etiam major conſequente, & ratio dicitur *majoris inæqualitatis*, ſi exponens eſt 1 minor, antecedens eſt etiam conſequente minor, & ratio dicitur *minoris inæqualitatis*. Si exponens eſt numerus rationalis, ratio dicitur *rationalis*, ſi irrationalis, ratio etiam eſt *irrationalis*; ſi exponens partim rationalis eſt, partim irrationalis, ratio eſt *mixta*. Ratio porro rationalis tot in ſpecies ſubdjviditur, quot ſpecies ſub ſe continet exponens rationalis. Rationalis integer exponit multiplicitatem, fractio ſubmultiplicitatem, proinde exponens integer multiplæ, *ſubmultiplæ*, fractus reſpondet. Rationalis mixtus conſtans ex 1, & fractione, cuius numeeſt 1, reſpondet *ſuperparticulari* (*ſch. def.* 13.)

Ratio

Ratio igitur tali exponente gaudens dicetur ſuperparticularis. Quodſi pergas per reliquas partes (*ſch. cit.*) alias rationum rationalium ſpecies intelliges.

Def. 32. SI denique exponens ſit numerus in ſe compoſitus, ratio dicitur *compoſita*, ex iis rationibus, quarum exponentes in ſe ducti conponunt illius exponentem. Sic quoniam exponens rationis 24 : 2 = 12 ſolvi poteſt in factores 3, 4, vel 2, & 6, ratio illa compoſita eſt ex tripla, & quadrupla, vel ex dupla, & ſextupla. In ſpecie ſi exponens componatur ducendo aliquem numerum in ſe ipſum, ratio dicitur *multiplicata* ejus rationis, quam ille numerus exponit, & quidem *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, ſi exponens producatur ducendo illum numerum bis, ter, quater in ſe ipſum; ſimplex vero reſpectu duplicatæ dicitur *ſubduplicata*, *ſubtriplicata* reſpectu triplicatæ, & in genere *ſubmultiplicata* reſpectu multiplicatæ. Sic exponens 16 rationis 32 : 2 ſolvitur in 2. 2. 2. 2; adeoque illa eſt quadruplicata duplæ, & ratio dupla *v. g.* 32. : 16. eſt illius ſubquadruplicata; & exponens rationis a^4 : 1. ſolvitur in *a. a. a. a*, proinde illa ratio eſt quadruplicata rationis *a* : 1. Diſcrimen inter rationem multiplam, ſubmultiplam, & multiplicatam, ac ſubmultiplicatam, facile agnoſcetis præſertim ad ea, quæ in *def*, 26. monuimus, attendentes. Si denique exponens ſit factum ex ejus radice ſecunda in ipſum, ratio dicitur *ſeſquiplicata*, & hujus ſubduplicata *ſubſeſquiplicata* vocatur.

Cor. 1,

Cor. 1. RAtionum $a:b, c:d, e:f$ exponentes ſunt $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ [*cor.* 4. *def.* 29.) quorum factum eſt $\frac{ace}{bdf}$ (*prob.* 10.) Igitur ratio $ace:bdf$, quam habet factum ex antecedentibus aliquot rationum ad factum ex earundem conſequentibus, eſt ratio ex jiſdem compoſita.

Cor. 2. ET quoniam huiuſmodi fractiones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ſunt exponentes reſpectivarum rationum ſimplicium $a:b, c:d, e:f$, & $\frac{ace}{bdf}$ exponit rationem ex jiſdem compoſitam, exponens igitur rationis compoſitæ æquatur facto ex exponentibus rationum ſimplicium.

Cor. 3. IN rationibus æqualibus exponens eſt idem (*def.* 30.) jgitur [*cor.* 2.] exponens rationis duplicatæ eſt factum ex exponente ſimplicis in ſe ipſum, ſeu (*def.* 26.) ſecunda ipſius potentia, exponens triplicatæ tertia potentia, & ſic deinceps. Porro ejuſdem, vel æqualium numerorum potentiæ ſunt æquales; adeoque rationes ejuſdem, vel æqualium duplicatæ, triplicatæ &c. ſunt inter ſe æquales. (*th.* 18.)

Cor. 4. SI $a:b = c:d$, & $e:f = g:h$, & $i:k = l:m$ &c. erit $\frac{aei}{bfk} = \frac{cgl}{dhm}$ (*th.* 18.) eſt vero $\frac{aei}{bfk}$ exponens rationis $aei:bfk$ compoſitæ ex rationibus $a:b$.

$e:f$,

e : *f*, *i* : *k* [*cor.* 1.] & $\frac{cgl}{dbm}$ exponens rationis *cgl* : *dbm* compoſitæ ex rationibus *c* : *d*, *g* : *b*, *l* : *m*; igitur rationes compoſitæ ex totidem ſimilibus habent æquales exponentes, adeoque inter ſe æquales ſunt. (*def.* 30.)

Cor. 5 SInt quantitates quotcumque *a b c d e f &c.* & rationes, quas inter ſe dicunt omnes *a* : *b*, *b* : *c*, *c* : *d &c.* ratio ex his omnibus compoſita erit (*cor.* 1.) *a b c d e f*. *b c d e f g* = *a* : *g* (*cor.* 1. *def.* 32.) In ſerie ergo quotlibet quantitatum prima eſt ad ultimam in ratione compoſita ex rationibus omnium.

Cor. 6. QUodſi hæ quantitates conſtituant continuam proportionem, ita ut ſit *a* : *b* = *b* : *c* = *c* : *d* = *d* : *e* = *e* : *f* &c. quoniam ratio *a b* : *b c* eſt compoſita ex rationibus *a* : *b*, & *b* : *c*, ſeu duplicata ipſius *a* : *b*, eſtque *a* : *c* = *ab* : *bc* (*cor.* 5. *def.* 30.) prima erit ad tertiam in ratione duplicata primæ ad ſecundam. Similiter ratio *abc* : *bcd* erit triplicata ipſius *a* : *b*; unde cum *abc* : *bcd* = *a* : *d* (*cor.* 5. *def.* 30.) erit prima ad quartam in ratione triplicata primæ ad ſecundam; & eodem pacto videtur primam fore ad quintam in ratione quadruplicata, ad ſextam in quintuplicata &c. ratione primæ ad ſecundam.

Cor. 7. QUemadmodum *a* : *e* eſt ratio quadruplicata *a* : *b*, ita *c* : *g* eſt quadruplicata *c* : *d* (*cor.* 6.) eſt vero (*hyp.*) *a* : *b* = *c* : *d*; ergo (*cor.* 3.) *a* : *e* = *c* : *g*. Similiter oſtendam *a* : *f* = *c* : *h*, & *a* : *g* = *c* : *i*, & in genere eſſe *a*

ad aliam

Digitized by Google

ad aliam quotcumque locis ab ipſa diſtantem, ut c ad aliam æquidiſtantem. Sunt ergo in ſerie continua quantitatum eandem rationem habentium quantitates æquidiſtantes in eadem ratione.

Cor. 8. QUoniam ſecunda, tertia, quarta &c. potentia primæ ad ſecundam, tertiam, quartam &c. potentiam ſecundæ eſt reſpective in duplicata, triplicata, quadruplicata primæ ad ſecundam (*cor.* 1. *& def.* 26.) erit (*cor.* 6.) prima ad tertiam, ut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ad quartam, ut cubus primæ ad cubum ſecundæ &c. (*cor.* 3.)

Th. 24. *SI antecedens per aliquid multiplicetur, vel dividatur, per hoc ipſum multiplicatur, vel dividitur exponens rationis, ſi per aliquid multiplicetur conſequens, per hoc ipſum dividitur, ſi dividatur conſequens, per hoc ipſum multiplicatur idem rationis exponens.*

Dem. RAtio $a:b = \frac{a}{b}$, & ejus exponens eſt hujus fractionis valor (*cor.* 4. *def.* 29.) ſed hujuſmodi valor multiplicatur per integrum quodlibet n ducendo ipſum in illius numeratorem, dividitur ducendo n in denominatorem [*cor.* 1. 2. *&* 3 *prob.* 19] ergo ſi antecedens rationis multiplicetur per aliquid, per hoc etiam multiplicatur, si multiplicetur per aliquid conſequens, per hoc dividitur exponens rationis; ſimiliter ſi antecedens rationis $\frac{a}{b}$ dividatur per n, ea evadit $\frac{a:n}{b}$ (*def.* 25.] $= \frac{a}{bn}$ (*cor.* 2. *th.* 20.) ſi per n dividatur con-

tur conſequens b eadem evadet in $\frac{a}{b:n} = \frac{an}{b}$ ob eandem rationem. Perinde eſt igitur dividere antecedens, ac multiplicare conſequens. Ergo ſi antecedens dividitur per n, per n etiam dividitur exponens (*ex dem. in cor.* 1) ſi conſequens dividitur per n, per n multiplicatur exponens (*ex dem. in cor.* 2 [*q. e. d.*

Th.25. *Ratio qualibet eſt ad quamlibet in ratione compoſita ex directa antecedentium, & inverſa conſequentium.*

Dem. Sint rationes $a : b$, $c : d$, ſeu (*cor.* 4 *def.* 29.) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ quoniam $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$ (*prob.* 19.) ergo $ad : bc$ compoſita ex directa antecedentium, & inverſa conſequentium eſt eadem cum ratione $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ quam habet (*cor.* 4. *def.* 28.) ratio $a : b$ ad rationem $c : d$

Cor. I. Si loco ſecundæ rationis $c : d$ ponatur prima inverſa $b : a$, ratio compoſita ex directa antecedentium, & inverſa conſequentium erit $a^2 : b^2$ duplicata antecedentis ad conſequens (*cor.* 1. *def.* 32.) omnis itaque ratio eſt ad ſe ipſam inverſam in ratione duplicata antecedentis ad conſequens.

Cor. 2. Et cum exponens rationis duplicatæ ſit ſecunda dignitas exponentis ſimplicis (*def.* 26.) exponens rationis, quam habet

habet ratio quælibet ad ſe ipſam inverſam, eſt quadratum exponentis rationis ſimplicis. Eſt vero antecedens ad conſequens, ut exponens ad 1. Ergo omnis ratio eſt ad ſe ipſam inverſam, uti quadratum ſui exponentis ad 1.

Cor. 3. SI ſecunda fuerit $a:c$ habens idem antecedens cum prima, ratio illa compoſita ex directa antecedentium, & inverſa conſequentium erit $ac:ab = c:b$ (*cor.* 5. *def.* 29.) adeoque prima ratio erit ad ſecundam in ratione inverſa conſequentium.

Cor. 4. SI ſecunda ſit $c:b$ habens idem conſequens cum prima, ratio illa compoſita erit $ab:cb$ (*cor.* 1. *def.* 31.) $= a:c$ (*cor.* 5. *def.* 30.) ſcilicet rationes, quæ eodem conſequente gaudent, ſunt in ratione directa antecedentium.

ARTICULUS III.

De Proportione, ejus proprietatibus, & variis in ipſa argumentandi modis.

Def. 33. IDentitas, ſeu ſimilitudo duarum rationum *proportio* dicitur, quæ, ſi conſequens primæ rationis ſit idem cum antecedente ſecundæ, appellatur *continua*; ſin minus, *diſcreta*.

Cor. I. INter factum, factores, & 1; & inter dividendum, diviſorem, quotum & 1; ac demum inter antecedens, conſequens, exponentem rationis, & 1; proportio intercedit (*cor.* 2. & 4 *def.* 30.)

Cor. 2.

Cor. 2. IN omni proportione, vel antecedentia conſequentium, vel conſequentia antecedentium ſunt partes ſimiles (*cor.* 1 *def.* 30.)

Cor. 3. EX datis duabus quantitatibus oritur proportio, ſi per eandem tertiam, vel per æquales ambæ multiplicentur, vel dividantur; facta enim, vel quoti eandem, ac quantitates ipſæ, rationem habent (*cor.* 6. *def.* 30.)

Cor. 4. ALiæ adhuc bene multæ eruuntur proportiones (*cor.* 5. *def.* 30.] quas hic non recenſeo, protereaquod clariſſimæ ſunt, & ſua ſponte fluunt.

Cor. 5. SI quantitates proportionales ſint a, b, c, d, proportio exponetur exponendo rationes a ad b, c ad d, & earum æqualitatem. Porro ratio a ad b exponitur per $a:b$ & ratio c ad d per $c:d$ [*cor.* 4. *def.* 29.] ipſa autem æqualitas per $=$ (*n.* 8 *Prol.*) ſignum ergo derivativum proportionis quatuor quantitatum a, b, c, d, eſt $a:b = c:d$.

Th. 26. *IN omni proportione factum extremorum, ſcilicet antecedentis primæ rationis in conſequens ſecundæ, æquatur facto mediorum, ſcilicet conſequentis primæ in antecedens ſecundæ; & contra, ſi factum* a d *duarum quantitatum æquatur facto* b c *aliarum duarum, factores* b, *&* c *ſunt termini medii proportionis, & extremi ſunt* a, *&* d, *vel hi ſunt medii, & illi extremi.*

Dem. 1. $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, & $\frac{cb}{bd} = \frac{c}{d}$ (*cor.* 2. *th.* 20.)

ſed

ſed $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (*def.* 30. & *cor.* 4. *def.* 29.) ergo $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}$ (*f. in prol.*) adeoque $ad = cb$ (*th.* 18.) *q. e.* 1.

2. $ad = bc$ (*hyp.*) & $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ (*th.* 19] ſed $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, & $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$ (*cor.* 2. *th.* 20.) ergo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ [*f. in prol.*] ſeu $a : b = c : d$ (*cor.* 3. & 4. *def.* 29.) *q. e.* 2.

Cor. I. SI in præſenti demonſtratione loco æquationis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ſubſtituatur $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, & in toto ejus decurſu loco ſigni $=$ ſubſtituatur $\gtrless$, ultima concluſio erit $da \gtrless bc$, adeoque ſi fuerit $a : b \gtrless c : d$, erit etiam $ad \gtrless bc$, ſeu factum extremorum erit majus, vel minus facto mediorum. Similiter, ſi in ſecunda parte, exceptis æquationibus $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, & $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$, loco ſigni $=$ ſubſtituatur $\gtrless$, eadem demonſtratione oſtendes, ſi factum $ad \gtrless c.b$. erit $a : b \gtrless c : d$.

Cor. 2. SI proportio fuerit continua antecedens ſecundæ rationis erit idem cum conſequente primæ (*def.* 33.) adeoque factum mediorum erit quadratum ſecundi (*def.* 26.) in proportione igitur continua factum extremorum æquatur quadrato medii.

Cor. 3. HInc eruitur formula exprimens terminum quemcumque proportionis; ſi nempe fuerit proportio $a : b = c : d$, erit $ad = bc$, & (*th.* 19.) $d = \frac{bc}{a}$, $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$. Quod ſi ea fuerit $a : b = b : c$, erit $ac = b^2$, & $a = \frac{b^2}{c}$, & $c = \frac{b^2}{a}$, & $b = \sqrt{ac}$.

Cor. 4. SI inter a, & b quærantur quotcumque medii continue proportionales vi hujus th. facile etiam inveniuntur. Quæratur enim 1.° unus x, erit (*cor.* 6. *def.* 32.) $a^2 : x^2 = a : b$, & $a^2 b = a x^2$, & $ab = x^2$, ſeu $x = \sqrt{ab}$, ut in cor. 3. Quærantur 2.° duo x, & z (*cor.* 6. *def.* 32.) $a^3 : x^3 = a : b$, & $a^3\ 3 = a x^3$ & $a^2 b = x^3$ (*th.* 19.) unde $x = \sqrt{ab^2}$ (*th.* 19.) inter hunc inventum, & datum b mediat z inveniendus per regulam caſus primi. Si quærantur tres, erit eorum primus $\sqrt{a^3 b}$, inter quem, & b mediant duo inveniendi per regulam caſus ſecundi, & ſic porro. Ex obſervatione autem caſuum ſingulorum patet quæſitorum primum ſemper haberi, ſi per datorum alterum multiplicetur potentia primi habens eundem

dem exponentem cum numero mediorum quæſitorum, & ex facto eruatur radix, cujus exponens dictum numerum 1. ſuperet. E. g. 3 Primus duorum mediantium inter 4, & 32 eſt V¯ 4. 2 32 = 8. Methodum eruendi radices ſuperiorum graduum in arithmetica ſublimiori trademus.

Cor. 5. QUoniam factum *a d* = 1. *a d* (*b in prol.*) erit (*p.* 2. *th. præſ.*) 1 : *a* = *d*: *a d*; unde alia ratione hic patet, quod ſuperius jam demonſtratum eſt, eſſe ſcilicet in multiplicatione 1 ad factorem unum, ut factor alter ad factum. Similiter ſit *b* quotus, *a* diviſor, erit dividendum *a b*, & 1: *b* = *a*: *ab* h. e. unitas ad quotum, ut diviſor ad dividendum.

Cor. 6. SI fractionis *f* numerator ſit factum aliquod ex factoribus *a*, & *b*, *v. g* ſi $f = \frac{ab}{c}$ erit *f c* = *a b* [*th.* 18.) & [2. *p. th. hujus*) *c* : *a* = *b* : *f*; in omni nempe fractione denominator eſt ad factorem unum numeratoris, ut factor alter ad fractionem.

Cor. 7. QUoniam in omni proportione *a* : *b* = *c*: *d* (1 *p. hujus*) *a d* = *b* : *c*, & (*th* 18.) *a2d* = *a b c*, erit (2. *p. hujus*) *a* : *d* = *a2* : *b c*, h. e. prima eſt ad quartam, uti quadratum primæ ad factum mediarum.

Cor. 8. SImiliter ſi loco multiplicandi *a d*, & *b c* per *a*, multiplicetur per *d*, erit *ad2* = *b c d* (*th.* 18.) & [2 *p. huius*) *a* : *d* = *bc* : *d2*, ſed (*cor.* 7.) *a2*: *d* = *a2*: *bc*, ergo (*cor*: 8. *def*. 30.) *a2*: *bc* = *bc* : *d2* h. e. in omni pro-

Digitized by Google

portione factum mediarum eſt media proportionalis inter quadrata extremarum.

Cor. 9. SI $a2 = d2$, erit $a : a = d : d$ [*cor.* 6. *def.* 30.) ergo (*cor.* 8.) $a4 : ad = ad : d2.$, h. e. ſi quadratum $a2 = d2$, erit factum ex radicibus inter hæc quadrata media proportionalis; vel ſi ponatur $a : b = c : d$ erit bc ad [2. *p. huius*) ſed $a2 : bc = bc : d2$. [*cor.* 8] ergo $a2 : ad = ad : d2$, (*cor.* 7. *def.* 30.]

Th. 27. *IN omni proportione* a : b = c : d, *ſi* a *ſit terminus maximus, erit* d *minimus, & a + d ſumma maximi, & minimi maior* c + *b ſumma reliquorum.*

Dem. I. $a : b = c : d$ (*hyp.*) ſeu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (*cor.* 4. *def.* 29.) Quoniam igitur numerator a major numeratore c (*hyp.*) etiam denominator b major erit denominatore d (*cor.* 1, *th.* 20.) &, cum numerator a ſit terminus maximus, erit ſuo denominatore b major (*hyp.*) & hinc numerator c etiam major denominatore d (*cor.* 1. *th.* 20] unde $d < c < b < a$ *q. e.* 1.

2 Iam vero $b\ (c - d) > d\ [c - d]$ [*th.* 18.) h. e. $bc - bd > dc - dd$ (*prob.* 10.] & adjiciendo utrique $d2 + bd$, erit [*th.* 11.] $bc - bd + d2 + bd > dc - d2 + d2 + bd$, ſeu (*prob.* 6.) $bc + d2 > dc + bd$, & (*th.* 19. & *prob.* 11.) $\frac{bc}{d} + d > c + b$. Sed $\frac{bc}{d} = a$ (*cor.* 4. *th.* 26.) ergo (*n.* 8. *prol.*) $a + d > c + b$. *q. e.* 2.

ſuo de;

Th. 28. IN *omni proportione* a : b = c : d *eſt etiam invertendo* b : a = d : c, *& alternando* a : c = b : d.

Dem. *ad* = *bc* [*th.* 26.] & (*p.* 2. *th.* 26.) *b* : *a* = *d* : *c*. *q* : 1. & *a* : *c* = *b* : *d*. *q. e.* 2.

Cor. 1. EST igitur etiam 1 ad multiplicandum, ut multiplicans ad factum, 1. ad denominatorem, uti fractio ad numeratorem, & ſimili pacto inverti, ac alternari poſſunt omnes proportiones demonſtratæ in corollariis def.num præc.

Cor. 2. SI factorum *a*, & *b* alteruter diviſus intelligatur per *m*, factum evadet $\frac{ab}{m}$ (*cor.* 1. *prob.* 19.] & in hac fractione 1 : *m* = $\frac{ab}{m}$: *ab* (*cor.* 1:) ſi factor alter *b* dividatur per *n*, factum erit $\frac{ab}{mn}$ (*prob.* 19.] & [*cor.* 1.) 1 : *mn* =, $\frac{ab}{mn}$: *ab*. Si demum factor uterque ſit *a*, & dividatur per *m*, erit factum $\frac{a2}{m2}$ (*prob.* 19.) & 1 : *m*2 = $\frac{a2}{m2}$: *a*2 ; ſcilicet in prima hyp. factum poſt diviſionem eſt ad factum ante diviſionem, uti 1. ad numerum dividentem, in ſecunda ipſa facta ſunt ut 1 ad factum ex diviſoribus; in tertia uti 1 ad quadratum diviſoris, & factum evadit ita ſubmultiplum, ſicuti 1 eſt ſubmultipla diviſoris [*cor.* 2. *def.* 29. *&* *def.* 12.]

Cor. 3. SI in proportione $a : b = c : d$ antecedens $a = c$, quoniam (2. *p.*) $a : c = b : d$, etiam $b = d$, & ſi $b = d$ etiam $a = c$ (*cor* 7. *def.* 30.) Si $a \gtrless c$, etiam $b \gtrless d$ (*cor. cit.*] h. e. ſi in proportione antecedentia æquantur, etiam æquantur conſequentia: ſi æqualia ſunt iſta, æqualia ſunt & illa, ſi antecedens primum majus, vel minus ſecundo, etiam conſequens primum majus, vel minus erit ſecundo.

Cor. 4. IN proportione $a : b = c : d$ (2. *p.*) eſt etiam $a : c = b : d$. Sed $ma : mc = a : c$, vel $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = a : c = b : d$ [*cor.* 3. *def.* 30.] ergo $ma : mc = a : c = b : d$, vel $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = a : c = b : d$ (*cor*, 3. *def.* 30.) & rurſus alternando (2. *p.*) $ma : b = mc : d$. vel $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m}$; ſunt ergo ma, mc, vel $\frac{a}{m}, \frac{c}{m}$ ſimul æqualia, vel majora, vel minora ipſis b, d (*cor.* 3.) ſunt vero ma, mc æquemultiplicia, & $\frac{a}{m}, \frac{c}{m}$ æqueſubmultiplicia antecedentium a, & c (*cor.* 2. *def.* 25.) In omni igitur proportione æquemultiplicia, vel æqueſubmultiplicia antecedentium ſimul ſunt, vel æqualia, vel majora, vel minora ipſis conſequentibus: idem patet aſſumptis æquemultiplicibus, vel ſubmultiplicibus conſequentium.

Th. 29

Digitized by Google

Th. 29. *IN omni proportione* a:b = c:d *factum antecedentium* a c *eſt ad factum conſequentium* b d, *uti quadratum antecedentis* a^2 *ad quadratum ſui conſequentis* b^2, *vel uti* $c^2 : d^2$ 2.° *factum ex terminis primæ rationis eſt ad factum ex terminis ſecundæ, uti quadratum antecedentis* a^2 *ad quadratum antecedentis* c^2.

Dem. I. $a\,d = b\,c$ (1. *p. th.* 26.) & multiplicando per $a\,b$ erit (*th.* 18.) $a^2\,bd = ab^2c$, & (2 *p. th.* 26.) $a^2 : b^2 = ac : bd^2$, vel multiplicando per $c\,d$ (*th.* 18.) $a\,c\,d^2 = b\,c^2\,d$, & (2 *p. th.*) $c^2 : d^2 = a\,c : b\,d$. *q. e.* 1.

2. $a : b = c : d$ (*hyp.*) & alternando (2. *p: th.* 28.) $a : c = b : d$, & (1. *p.*) $a\,b : c\,d = a^2 : c^2 = b^2 : d^2$ *q. e.* 2.

Th. 30. *IN omni proportione* a:b = c:d *eſt etiam componendo*, a + b : b = c + d : d, *& dividendo* a − b : b = c − d : d.

Dem. $a\,d = b\,c$ (1. *p. th.* 26.) & (*th.* 10, *vel* 13.) $a\,d \mp b\,d = b\,c \mp b\,d$, ſcilicet (*prob.* 10.] $(a \mp b)\,d = b\,(c \mp d)$ unde (2. *p. th.* 26.) $a \mp b : b = c \mp d : d$, *q. e.* 1. & 2.

Cor. I. SI $a + b : b = c + d : d$ [2. *p.*] $a + b - b\,(a] : b = c + d - d\,(c) : d$, & iterum $a + b - b - b\,(a - b) : b = c + d - d - d\,(c - d) : d$; &, ſi $a - b : b = c - d : d$ (1. *p.*) $a - b + b\,(a) : b = c - d + d\,(c] : d$, & iterum $a - b + b + b\,(a + b) : b = c - d + d + d\,(c + d)\,d$: (*reductiones in parentheſibus factæ ſunt vi prob.* 6.) ſcilicet, ſi ſumma antecedentis, & conſequentis eſt ad con-

ſequens, uti ſumma antecedentis, & conſequentis alterius ad alterum conſequens, etiam differentia primi antecedentis, & conſequentis erit ad primum conſequens, uti differentia ſecundi antecedentis, & conſequentis eſt ad ſecundum conſequens, & contra.

Cor. 2. SI totum $a+b$ eſt ad totum $c+d$, uti ablatum b ad ablatum d, cum etiam ſit alternando (2. *p. th.* 28.] $a+b:b=c+d:d$, erit [2. *p. hujus*) $a+b-b\,(a]:b=c+d-d\,[c):d$, & alternando (2. *p. th.* 28.) $a:c=b:d$: imo ob $a+b:c+d=b:d$ (*hyp.*) erit etiam (*cor.* 8. *def.* 30.) $a:c=a+b:c+d$, nimirum etiam reliquum a ad reliquum c, uti ablatum b ad ablatum d, & uti totum $a+b$ ad totum $c+d$.

Cor. 3. HInc invertendo eruitur 1.° $b:a\mp b=d:c\mp d$, 2.° Alternando $b:d=a\mp b:c\mp d$, & quoniam ex $a:b=c:d$ (*hyp. th. hujus*) fit alternando $a:c=b:d$, habetur 3.o (*cor* 8. *def.* 30.) $a\mp b:c\mp d=a:c$ 4.o alternando $a\mp b:a=c\mp d:c$. 5.° invertendo $a:a\mp b=c:c\mp d$.

Cor. 4. QUoniam (*hyp. th. hujus*) $a:b=c:d$, & alternando $a:c=b:d$, eodem modo, quo in *cor.* 3. evincam 1.° $a\mp c:c=b\mp d:d$ (*vi th. hujus*) & vi principiorum in *cor.* 3. *cit.* 2.° $a\mp c:b\mp d=c:d$ 3.° $a\mp c:b\mp d=a:b$ 4.° $a\mp c:a=b\mp d:b$ 5.° $c:a\mp c=d:b\mp d$, 6.° $a:a\mp c=b:b\mp d$ in omni ſcilicet proportione ſumma, vel differentia antecedentium eſt ad ſummam, vel differentiam

tiam conſequentium, ut antecedens ad conſequens &c. *Enunciatio aliorum Theorematum in præſenti coroll. contentorum ex characteriſtica facile erui poteſt.*

Cor. 5. Sint rationes ſimiles quotcumque $a:b = c:d = e:f = g:h = i:k = l:m$ &c. erit (*cor.* 4.) $a \mp c : b \mp d : = c:d$, ſed $c:d = e:f$ [*hyp.*] ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp c : b \mp d = e:f$, & rurſus (*cor.* 4.) $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = e:f$, ſed $e:f = g:h$ (*hyp.*) ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = g:h$, & [*cor.* 4.] $a \mp c \mp e \mp g : b \mp d \mp f \mp h = g:h$. Similiter per cæteras pergere potes; unde ſi fuerint rationes quotcumque ſimiles, erit ſumma, vel differentia omnium antecedentium ad ſummam, vel differentiam conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens.

Cor. 6. Si ſummentur, vel ſubtrahantur, duo, vel tria tantum antecedentia, erunt ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens. (*cor.* 5.) *v. g.* $e \mp g : f \mp h$ $g:h$, vel $c \mp e \mp g \mp i : d \mp f \mp h \mp k$, vel etiam $g \mp i \mp l \mp n : h \mp k \mp m \mp o = n:o$, ſed (*hyp.*) $e:f = g:h$, vel $e:f = i:k$, vel $e:f = n:o$; igitur [*cor.* 8. *def.* 30.] $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = e \mp g : f \mp h = c \mp e \mp g \mp i : d \mp f \mp h \mp k = g \mp i \mp l \mp n : h \mp k \mp m \mp o$ &c. nempe ſumma, vel differentia duorum, vel trium antecedentium ad ſummam vel differentiam ſuorum conſequentium, ut ſumma

vel

vel differentia quotlibet antecedentium, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium.

Cor. 7. ULterius, cum ex hyp. rationes datæ omnes ſint ſimplices, tum eæ quæ ſunt loco impari, ſcilicet 1.a 3.a 5.a &c. tum eæ, quæ ſunt loco pari, ſcilicet 2.a 4.a 6.a &c. conſtituunt ſeriem rationum ſimilium, adeoque (*cor.* 6.) ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco impari, ad ſummam ſuorum conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens; *u. g.* $a \mp e \mp i : b \mp f \mp k = i : k$, & ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco pari, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens (*cor.* 6.) *u. g.* $c \mp g \mp l : d \mp h \mp m = f : m$. ſed (*hyp.*) $i : k = l : m$, ergo (*cor.* 8. *deſ.* 30.) $a \mp e \mp i : b \mp f \mp k = c \mp g \mp l : d \mp h \mp m$. Scilicet in ſerie rationum ſimilium ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco impari, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium, uti ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco pari, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium. alia ſequuntur alternando, & invertendo mox demoſtratatam proportionem Theoremata, alia adhuc ex cor.o 5.o deduci poſſunt; in iis eruendis, & demonſtrandis non inutiliter ſe exercebit tyro.

Sch. *CUm jam demonſtratis affinitatem habet etiam Theor. ſequens; ſi in duabus proportionibus conſequentia fuerint eadem, erit ſumma*

ſumma, vel differentia antecedentium ſub conſequente uno ad conſequens ipſum, uti ſumma, vel differentia antecedentium ſub altero ad alterum conſequens h. e. *ſi* $a : b = c : d$ *&* $e : b = f : d$ *erit* $a \mp e : b = c \mp f : d$. *Dem.* $ad = bc$ *&* $ed = bf$ (1 p. Th. 26,) *adeoque* $ad \mp cd = bc \mp bf$. (Th. 10 & 13) *&* (2 p. Th. 26.] $a \mp e : b = c \mp f : d$. *Quodſi ſit* $e > a$, *&* $f > c$, *tum, ut habeatur etiam* $e - a : b = f - c : d$, *ſecunda proportio primo loco ponatur, ut nempe ſit* $e : b = f : d$, *&* $a : b = c : d$. *Ex eadem enim demonſtratione habebis etiam* $e \mp a : b = f \mp c : d$. *Hoc ipſum eſt advertendum tum in Th. præc. tum in ejus cor., ut ubi ſubtractio fieri nequit, vel ipſæ rationes, vel earum ordo invertatur, & rem tentanti apparebit ſalvam manere hyp. ſalvam demonſtrationem, ut in caſu allato in Scholio præſenti.*

Th. 31. S*I duarum proportionum* $a : b = c : d$, *&* $e : f = g : h$ *termini homologi multiplicentur, vel dividantur facta, vel quoti adhuc porportionem* $ae : bf = cg : dh$, *vel* $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ *conſtituent.*

Dem. 1. $ad = bc$, & $eh = fg$ (1. *p. th.* 26.) & (*th.* 18.) $adeh = bcfg$, ſeu $aedh = bfcg$ (*th.* 15.) & [2. *p. th.* 26.) $ae : bf = cg : dh$. *q. e.* 1.

2. $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$ (*th.* 19.) ergo (2. *p. th.*

Digitized by Google

26.) $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ q. e. 2.

Cor. 1. SI proportiones fuerint quotlibet, facile patet etiam hic, quod vel multiplicatis, vel diviſis antecedentibus, & conſequentibus rationum, quæ ſunt loco impari, inde earum, quæ ſunt loco pari, facta vel quoti proportionem conſtituent. Sit enim 3.a proportio $i : k = l : m$, quoniam ex primis duabus facta eſt una $ae : bf = cg : dh$, ex hac, & $i : k = l : m$ eodem modo fiet una $aei : bfk = cgl : dhm$, & ſi ſuperaccedat quarta $n : o = p : q$: ob eamdem rationem erit $aein : bfko = cglp : dhmq$ &c. idem dicendum de quotis.

Cor. 2. QUodſi proportiones datæ fuerint $a : b = c : d$, iterum $a : b = c : d$, rurſus $a : b = c : d$, adhuc $a : b = c : d$, denuo $a : b = c : d$ &c. prodibit (cor. 1.) $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, $a^3 : b^3 := c^3 : d^3 : a^4$, $b^4 = c^4 : d^4$, $a^5 : b^5 = c^5 : d^5$, & in genere, ſi proportio $a : b = c : d$ detur vicibus n, erit $a^n : b^n : c^n : d^n$: h. e. quantitatum proportionalium potentiæ ejuſdem ordinis, ſunt etiam proportionales.

Cor. 3. RUrſus (cor. 1.) $\frac{a}{a} : \frac{b}{b} = \frac{c}{c} : \frac{d}{d}$, h. e. $1 : 1 = 1 : 1$ [cor. 1.) & $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$, $\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{d^2}$, & $\frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} = \frac{1}{c^3} : \frac{1}{d}$, & in genere $\frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{1}{c^n} : \frac{1}{d^n}$ h. e. ſi per per potentias ejuſdem gradus quatuor quan-

quantitatum proportionalium dividatur 1, quoti erunt proportionales,

Cor. 4. Si $a:b = c:x$ & $d:x = e:z$, erit $ad:bx = ce:xz$, & (1. p. th. 26) $adxz = bcex$, & (th. 19.) $adz = bce$, & (th. 19.) $bce:ad = z$.

Th. 31. *Si fuerint tres numeri hinc* a, b, c, *illinc* d, e, f, *& ordinate ut* a : b, *ita* d : e, *& ut* b : c, *ita* e : f, *erit etiam* a : c = d : f 2.° *Si vero fuerit perturbate ut* a : b, *ita* d : e, *& ut* b : c *ita* f : d, *erit* a : c = f : e.

Dem. 1. $ae = bd$, & $bf = ce$ (th. 26.) & (th. 18.) $aebf = bcde$, & (2. p. th. 26.) $a:c = bde:ebf$: Sed $bde:ebf = d:f$ [cor. 6. def. 30.] ergo $a:c = d:f$. q. e. 1.

2. $ae = bd$, & $bd = cf$ (1. p. th. 26.) ergo $ae = cf$ [f. in Prol.) & (2. p. th. 26.) $a:c = f:e$. q. e. 2.

Cor. 1. Si quantitates hinc, & illinc ordinatæ fuerint plures v. g. ſi $a:b = f:g$, $b:c = g:h$, $c:d = h:i$, $d:e = i:k$ &c. erit ſemper prima a ad ultimam e, ut prima f ad ultimam k. Nam ob $a:c = f:h$ (1. p.] & $c:d = h:i$ [hyp.) erit etiam $a:d = f:i$ [1. p.) & eodem modo argumentari licet uſque ad ultimam. Quodſi plures hinc, & illinc iterum fuerint, ſed ad unam partem contrario modo, ac ad alteram ordinentur v. g. hinc ſint a b, c, d, & illinc g, h, l, m, & $a:b = m:l$, $b:c = l:h$, $c:d = h:g$, ob $al = bm$, & $bh = cl$, & $cg = dh$ [1. p. th. hujus] erit etiam $albhcg = mcldh$ (th, 18.) & [th. 19.] $ag = md$, adeoque

adeoque [*p. th.* 26.) $a : d = m : g$ 2 h. e. ultima ad primam hinc, ut prima, ad ultimam illinc. *d* Si vero ita ordinentur ut ſit $a : b = l : m$; $b : c = h : l$, $c : d = g : h$ &c. ob $a\,m = b\,l$, & $a\,l = c\,h$, & $c\,h = d\,g$ [1. *p. th.* 26.) erit adhuc $a : d = g : m$, h. e. prima ad ultimam hinc, uti prima ad ultimam illinc; & ſi ordinentur ita $a : b = l : m$, $b : c = g : h$, $c : d = h : l$, cum etiam ſit $a\,b\,c : b\,c\,d = l\,g\,h : h\,l\,m$ (*cor.* 1. *th.* 30.) erit etiam $a : d = g : m$, prima ad ultimam ordinate, ut prima ad ultimam.

Cor. 2. SI fuerit 1.° $b : a = e : d$, & $b : c = d : e$, cum etiam ſit $a : b = d : e$ 1. (*p. th. hujus*) erit adhuc (1. *p.*) $a : c = d : f$. 2.° ſi $a : b = d : e$ & $c : b = f : e$ cum etiam ſit $b : c = e : f$ (1. *p. th. hujus*) erit adhuc [1. *p.*] $a : c = d : f$: 3.° ſi ſit $b : a = e : d$, & $c : b = f : e$ cum etiam ſit 1. (*p. th.* 28.) $a : b = d : e$ erit adhuc (*n.* 2.) $a : c = d : f$ 4.° eodem modo ſi, vel ſecunda proportio, vel utraque ſecundæ partis th. inverſim proponantur, poterunt reduci ad eas, quæ in hyp. dictæ partis habentur. 1. *p. th.* & hinc infertur ſemper illa concluſio; imo id etiam applicari poteſt illis, quæ ſtatuuntur in *cor.* 1.

Sch. L*Icet* Regulæ trium, & quinque, *tum directæ, tum inverſæ, aliarumque, quæ in ſcholis Arithmeticorum tanto apparatu tractari ſolent, expreſſam nondum offenderitis in noſtra Arithmetica mentionem, non dubito tamen affirmare eas iam luculenter ſatis a nobis fuiſſe non tantum expoſitas, verum etiam demonſtratas. Regula trium* directa *ex tribus datis eruit quartum*

Digitized by Google

tum, inverſa *ex tribus datis eruit tertium: Regula quinque importat duas proportiones, quarum quinque termini cognoſcuntur, ſcilicet tres primæ, & duo ſecundæ, quarto primæ vices gerente termini alicuius ſecundæ: duas ea importat quæſtiones, duas incognitas, ſed per huiuſmodi regulam cognitio: ſecundæ quæritur ſolum, ut parcatur labori pro inveſtigatione primæ, ut ſi ſit* a : b = c : x, & d : x = e : z, *quæraturque* z. *Regula ſocietatis ex datis antecedentibus, & ſumma conſequentium quærit conſequentia ipſa: at huiuſmodi regularum formulas habes* cor.: 3. th: 26. & 4. th. 31.

Proponi etiam ſolet regula alligationis, regula falſi &c. ſed qui probe callebunt hujus capitis Theoriam calculum literalem, & problemata omnia, quæ per huiuſmodi regulas ſolvuntur, & expedite magis ſolvent, & eo ipſo regulas adinvenient. Cæterum, ne de me ullus conquæratur, ubi calculi literalis ad ſolvenda problemata applicationem perſequar, cæteras regulas ad inſtar exemplorum proponam, & demonſtrabo.

Ad dignoſcendum, quandonam regula trium, *vel* quinque *directa, vel inverſa ſit, uſus. & naturale ratiocinium confert magis, quam præcepta. Veruntamen quoniam præter hunc, alios etiam habent in Matheſi uſus, ſequentia adiicio.*

1. *Si creſcente* a *uniformiter creſcit* b, *erit* a *ad ſuum incrementum, uti* b *ad incrementum reſpondens incremento ipſius* a. *Sit enim ipſius* a *incrementum* na; *Quoniam eadem lege creſcit* b (hyp) *incrementum ipſius* b *erit* nb, *nimirum evadente* a *dupla, tripla*, n *pla, etiam dupla, tirpla*

pla, n *pla evadet* b; *eſt vero* a : n a = b : n b (def. 30.) *ergo &c.*

2. *Si creſcente* a *deſcreſcit* b, *erit* a *ad ſuum incrementum, uti decrementum* b, *ad ipſam* b. *Eadem enim ratione oſtendetur incremento* na *ipſius* a *reſpondere decrementum* $\frac{1}{n}$ b *ipſius* b, *cum ergo ſit* a : na = $\frac{1}{n}$ b : b (*def.* 30.) *liquet propoſitum.*

3. *Si creſcentibus* b, *&* c *creſcit* a, *ſed alterutra* b *creſcente, altera* c *eadem maneat, vel contra,* a : n a = b : n b, *vel* a : m a = c : m c. *Cum enim* (n. 1,) *ſit* a : n a = b : nb, *&* a : ma = c : mc, *erit* (*th.* 31.] aa : nama = bc : nbmc. *Jam in primo caſu ſecunda proportio evadit in* a : a = c : c (hyp.] *ſeu in* 1 : 1 = 1 : 1 [*cor.* 5. *def.* 30.) *& in* 1 : 1 = 1 : 1 *evadit prima in caſu altero ob eandem rationem, & tota illa compoſita evadit in* a : na = b : nb *in primo caſu, in ſecundo evadit in* a ; ma = c : mc (*cor. cit.*) *ergo &c. Eodem modo ſi* a *creſcat creſcente* b, *& deſcreſcente* c, *ſed creſcente* b *eadem maneat* c, *vel decreſcente* c *eadem maneat* b, *evincam eſſe* a : na = b : nb *in primo caſu, & in altero caſu eſſe* a : m a = $\frac{1}{m}$ c : ç

4 *Quantitates ſunt in ratione compoſita ex directis earum, quibus creſcentibus ipſæ uniformiter creſcunt. Sint* b, & c, *quibus creſcentibus in* B, *&* C, a *creſcat in* A. *Ponamus* a *creſcere in* x, *dum* b *creſcit*

ſcit in B *eadem interim manente* c, *erit* a : x = b : B (n. 3) *&* x : A = c : C [n. 3.) *&* [th. 31.) a x : Ax = bc : BC, *ſeu* (cor. 6. def. 30.) a : A = bc : BC. *creſcat* a *in* A *creſcentibus* b, c, d, *in* B, C, D. *Ponamus* a *creſcere in* x *creſcentibus* b, c, *in* B, C *eadem interim manente* d, *erit* a : x = bc : BC (ex dem.) *&* (n. 3] x : A = d : D : *unde iterum* (th. 31.] a x : A x = b c d : BCD *&* (cor. 6. def. 30.) a : A = b c d : BCD, *idem oſtenditur in omni alio caſu, in quo plures adhuc fuerint, quibus creſcentibus* a *uniformiter creſcat, jmo eadem penitus ratione evincitur, ſi ipſarum* b, c, d, *&c aliquæ creſcant uniformiter, aliquæ decreſcant, fore* a : A *in ratione compoſita ex directis creſcentium, & inverſis decreſcentium. Ex mercibus, & pretiis, ex itinieribus, velocitatitatibus, & temporibus facillime peti poſſunt exempla, quibus ſi applicetur brevis, & nova hac theoria, ipſa evadet planior, & eo ipſo palpabitur, quam bene conferat in uſu regulæ* trium, *vel quinque ad diſpoſitionem terminorum, per quam regula ipſa evadit directa, vel inverſa. Velim, attendatur ad vocem* uniformiter; *ſic enim evaneſcent difficultates, quæ contra noſtram hanc theoriam ſuboriri poſſunt.*

ARTICULUS IV.

De Progreſſionibus Geometricis.

Def. 34. SEries numerorum continue proportionalium dicitur progreſſio *geometrica*.

ſequens, uti ſumma antecedentis, & conſequentis alterius ad alterum conſequens, etiam differentia primi antecedentis, & conſequentis erit ad primum conſequens, uti differentia ſecundi antecedentis, & conſequentis eſt ad ſecundum conſequens, & contra.

Cor. 2. SI totum $a + b$ eſt ad totum $c + d$, uti ablatum b ad ablatum d, cum etiam ſit alternando (2. *p. th.* 28.] $a + b : b = c + d : d$, erit [2. *p. hujus*) $a + b - b\ (a] : b = c + d - d\ [c) : d$, & alternando (2. *p. th.* 28.) $a : c = b : d$: imo ob $a + b : c + d = b : d$ (*hyp.*) erit etiam (*cor.* 8. *def.* 30.) $a : c = a + b : c + d$, nimirum etiam reliquum a ad reliquum c, uti ablatum b ad ablatum d, & uti totum $a + b$ ad totum $c + d$.

Cor. 3. HInc invertendo eruitur 1.° $b : a \mp b = d : c \mp d$, 2.° Alternando $b : d = a \mp b : c \mp d$, & quoniam ex $a : b = c : d$ (*hyp. th. hujus*) fit alternando $a : c = b : d$, habetur 3.o (*cor* 8. *def.* 30.) $a \mp b : c \mp d = a : c$ 4.o alternando $a \mp b : a = c \mp d : c$. 5.° invertendo $a : a \mp b = c : c \mp d$.

Cor. 4. QUoniam (*hyp. th. hujus*) $a : b = c : d$, & alternando $a : c = b : d$, eodem modo, quo in *cor.* 3. evincam 1.° $a \mp c : c = b \mp d : d$ (*vi th. hujus*) & vi principiorum in *cor.* 3. *cit.* 2.° $a \mp c : b \mp d = c : d$ 3.° $a \mp c : b \mp d = a : b$ 4.° $a \mp c : a = b \mp d : b$ 5.° $c : a \mp c = d : b \mp d$, 6.° $a : a \mp c = b : b \mp d$ in omni ſcilicet proportione ſumma, vel differentia antecedentium eſt ad ſummam, vel differentiam

tiam conſequentium, ut antecedens ad conſequens &c. *Enunciatio aliorum Theorematum in præſenti coroll. contentorum ex characteriſtica facile erui poteſt.*

Cor. 5. SInt rationes ſimiles quotcumque $a:b = c:d = e:f = g:h = i:k = l:m$ &c. erit (*cor.* 4.) $a \mp c : b \mp d : = c:d$, ſed $c:d = e:f$ [*hyp.*] ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp c : b \mp d = e : f$, & rurſus (*cor.* 4.) $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = e:f$, ſed $e:f = g:h$ (*hyp.*) ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = g:h$, & [*cor.* 4.] $a \mp c \mp e \mp g : b \mp d \mp f \mp h = g:h$. Similiter per cæteras pergere potes; unde ſi fuerint rationes quotcumque ſimiles, erit ſumma, vel differentia omnium antecedentium ad ſummam, vel differentiam conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens.

Cor. 6. SI ſummentur, vel ſubtrahantur, duo, vel tria tantum antecedentia, erunt ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens. (*cor.* 5.) *v. g.* $e \mp g : f \mp h$ $g:h$, vel $c \mp e \mp g \mp i : d \mp f \mp h \mp k$, vel etiam $g \mp i \mp l \mp n : h \mp k \mp m \mp o = n:o$, ſed (*hyp.*) $e:f = g:h$, vel $e:f = i:k$, vel $e:f = n:o$; igitur [*cor.* 8. *def.* 30.] $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = e \mp g : f \mp h = c \mp e \mp g \mp i : d \mp f \mp h \mp k = g \mp i \mp l \mp n : h \mp k \mp m \mp o$ &c. nempe ſumma, vel differentia duorum, vel trium antecedentium ad ſummam vel differentiam ſuorum conſequentium, ut ſumma vel

vel differentia quotlibet antecedentium, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium.

Cor. 7. Ulterius, cum ex hyp. rationes datæ omnes ſint ſimplices, tum eæ quæ ſunt loco impari, ſcilicet 1.a 3.a 5.a &c. tum eæ, quæ ſunt loco pari, ſcilicet 2.a 4.a 6.a &c. conſtituunt ſeriem rationum ſimilium, adeoque (*cor.* 6.) ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco imparil, ad ſummam ſuorum conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens; *u. g.* $a \mp e \mp i : b \mp f \mp k = i : k$, & ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco pari, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium, uti antecedens quodlibet ad ſuum conſequens (*cor.* 6.) *u. g.* $c \mp g \mp l : d \mp h \mp m = f : m$. ſed (*hyp.*) $i : k = l : m$, ergo (*cor.* 8. *deſ.* 30.) $a \mp e \mp i : b \mp f + k = c \mp g \mp l : d \mp h \mp m$. Scilicet in ſerie rationum ſimilium ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco impari, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium, uti ſumma, vel differentia antecedentium earum, quæ ſunt loco pari, ad ſummam, vel differentiam ſuorum conſequentium. alia ſequuntur alternando, & invertendo mox demoſtratatam proportionem Theoremata, alia adhuc ex cor.o 5.o deduci poſſunt; in iis eruendis, & demonſtrandis non inutiliter ſe exercebit tyro.

Sch. *Cum jam demonſtratis affinitatem habet etiam Theor. ſequens; ſi in duabus proportionibus conſequentia fuerint eadem, erit ſumma*

ſumma, vel differentia antecedentium ſub conſequente uno ad conſequens ipſum, uti ſumma, vel differentia antecedentium ſub altero ad alterum conſequens h. e. *ſi* $a : b = c : d$ *&* $e : b = f : d$ *erit* $a \mp e : b = c \mp f : d$. *Dem.* $ad = bc$ *&* $ed = bf$ (1 p. Th. 26,) *adeoque* $ad \mp cd = bc \mp bf$. (Th. 10 & 13) *&* (2 p. Th. 26.] $a \mp e : b = c \mp f : d$. *Quodſi ſit* $e > a$, *&* $f > c$, *tum, ut habeatur etiam* $e - a : b = f - c : d$, *ſecunda proportio primo loco ponatur, ut nempe ſit* $e : b = f : d$, *&* $a : b = c : d$. *Ex eadem enim demonſtratione habebis etiam* $e \mp a : b = f \mp c : d$. *Hoc ipſum eſt advertendum tum in Th. præc. tum in ejus cor., ut ubi ſubtractio fieri nequit, vel ipſæ rationes, vel earum ordo invertatur, & rem tentanti apparebit ſalvam manere hyp. ſalvam demonſtrationem, ut in caſu allato in Scholio præſenti.*

Th. 31. S*I duarum proportionum* $a : b = c : d$, *&* $e : f = g : h$ *termini homologi multiplicentur, vel dividantur facta, vel quoti adhuc porportionem* $ae : bf = cg : dh$, *vel* $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ *conſtituent.*

Dem. 1. $ad = bc$, & $eh = fg$ (1. *p. th.* 26.) & (*th.* 18.) $adeh = bcfg$, ſeu $aedh = bfcg$ (*th.* 15.) & [2. *p. th.* 26.) $ae : bf = cg : dh$. *q. e.* 1.

2. $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$ (*th.* 19.) ergo (2. *p. th.*

26.) $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ q. e. 2.

Cor. I. SI proportiones fuerint quotlibet, facile patet etiam hic, quod vel multiplicatis, vel diviſis antecedentibus, & conſequentibus rationum, quæ ſunt loco impari, inde earum, quæ ſunt loco pari, facta vel quoti proportionem conſtituent. Sit enim 3.a proportio $i : k = l : m$, quoniam ex primis duabus facta eſt una $ae : bf = cg : dh$, ex hac, & $i : k = l : m$ eodem modo fiet una $aei : bfk = cgl : dhm$, & ſi ſuperaccedat quarta $n : o = p : q$: ob eamdem rationem erit $aein : bfko = cglp : dhmq$ *&c.* idem dicendum de quotis.

Cor. 2. QUodſi proportiones datæ fuerint $a : b = c : d$, iterum $a : b = c : d$, rurſus $a : b = c : d$, adhuc $a : b = c : d$, denuo $a : b = c : d$ *&c.* prodibit (*cor.* 1.) $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, $a^3 : b^3 := c^3 : d^3 : a^4, b^4 = c^4 : d^4$, $a^5 : b^5 = c^5 : d^5$, & in genere, ſi proportio $a : b = c : d$ detur vicibus n, erit $a^n : b^n : c^n : d^n$: h. e. quantitatum proportionalium potentiæ ejuſdem ordinis, ſunt etiam proportionales.

Cor. 3. RUrſus (*cor.* 1.) $\frac{a}{a} : \frac{b}{b} = \frac{c}{c} : \frac{d}{d}$, h. e. $1 : 1 = 1 : 1$ [*cor.* 1.) & $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$, $\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{d^2}$, & $\frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} = \frac{1}{c^3} : \frac{1}{d}$, & in genere $\frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{1}{c^n} : \frac{1}{d^n}$ h. e. ſi per per potentias ejuſdem gradus quatuor quan-

quantitatum proportionalium dividatur 1, quoti erunt proportionales,

Cor. 4. SI $a : b = c : x$ & $d : x = e : z$, erit $ad : bx = ce : xz$, & (1. p. th. 26) $adxz = bcex$, & (th. 19.) $adz = bce$, & (th. 19.) $bce : ad = z$.

Th. 31. *SI fuerint tres numeri hinc* a, b, c, *illinc* d, e, f, *& ordinate ut* a : b, *ita* d : e, *& ut* b : c, *ita* e : f, *erit etiam* a : c = d : f 2.° *Si vero fuerit perturbate ut* a : b, *ita* d : e, *& ut* b : c *ita* f : d, *erit* a : c = f : e.

Dem. I. $a e = b d$, & $b f = c e$ (th. 26.) & (th. 18.) $aebf = bcde$, & (2. p. th. 26.) $a : c = bde : ebf$: Sed $bde : ebf = d : f$ [cor. 6. def. 30.] ergo $a : c = d : f$. *q. e.* 1.

2. $ae = bd$, & $bd = cf$ (1. p. th. 26.) ergo $ae = cf$ [f. in Prol.) & (2. p. th. 26.) $a : c = f : e$. *q. e.* 2.

Cor. I. SI quantitates hinc, & illinc ordinatæ fuerint plures *v. g.* ſi $a : b = f : g$, $b : c = g : h$, $c : d = h : i$, $d : e = i$ k &c. erit ſemper prima a ad ultimam e, ut prima f ad ultimam k. Nam ob $a : c = f : h$ (1. p.] & $c : d = h : i$ [hyp.) erit etiam $a : d = f : i$ [1. p.) & eodem modo argumentari licet uſque ad ultimam. Quodſi plures hinc, & illinc iterum fuerint, ſed ad unam partem contrario modo, ac ad alteram ordinentur *v. g.* hinc ſint a b, c, d, & illinc g, h, l, m, & $a : b = m : l$, $b : c = l : h$, $c : d = h : g$, ob $a l = b m$, & $b h = c l$, & $c g = d h$ [1. p. th. hujus] erit etiam $albbcg = mcldh$ (th, 18.) & [th. 19.] $ag = md$, adeoque

adeoque [*p. th.* 26.) $a : d = m : g$ 2 h. e. ultima ad primam hinc, ut prima, ad ultimam illinc. d Si vero ita ordinentur ut ſit $a : b = l : m$; $b : c = h : l$, $c : d = g : h$ &c. ob $a\,m = b\,l$, & $a\,l = c\,h$, & $c\,h = d\,g$ [1. *p. th.* 26.) erit adhuc $a : d = g : m$, h. e. prima ad ultimam hinc, uti prima ad ultimam illinc; & ſi ordinentur ita $a : b = l : m$, $b : c = g : h$, $c : d = h : l$, cum etiam ſit $a\,b\,c : b\,c\,d = l\,g\,h : h\,l\,m$ (*cor.* 1. *th.* 30.) erit etiam $a : d = g : m$, prima ad ultimam ordinate, ut prima ad ultimam.

Cor. 2. SI fuerit 1.° $b : a = e : d$, & $b : c = d : e$, cum etiam ſit $a : b = d : e$ 1. (*p. th. hujus*) erit adhuc (1. *p.*) $a : c = d : f$. 2.° ſi $a : b = d : e$ & $c : b = f : e$ cum etiam ſit $b . c = e : f$ (1. *p. th. hujus*) erit adhuc [1. *p.*] $a : c = d : f$: 3.° ſi ſit $b : a = e : d$, & $c : b = f : e$ cum etiam ſit 1. (*p. th.* 28.) $a : b = d : e$ erit adhuc (*n.* 2.) $a : c = d : f$ 4.° eodem modo ſi, vel ſecunda proportio, vel utraque ſecundæ partis th. inverſim proponantur, poterunt reduci ad eas, quæ in hyp. dictæ partis habentur. 1. *p. th.* & hinc inferetur ſemper illa concluſio; imo id etiam applicari poteſt illis, quæ ſtatuuntur in *cor.* 1.

Sch. L*icet* Regulæ trium, & quinque, *tum directæ, tum inverſæ, aliarumque, quæ in ſcholis Arithmeticorum tanto apparatu tractari ſolent, expreſſam nondum offenderitis in noſtra Arithmetica mentionem, non dubito tamen affirmare eas iam luculenter ſatis a nobis fuiſſe non tantum expoſitas, verum etiam demonſtratas. Regula trium* directa *ex tribus datis eruit quartum*

tum, inverſa *ex tribus datis eruit tertium: Regula quinque importat duas proportiones, quarum quinque termini cognoſcuntur, ſcilicet tres primæ, & duo ſecundæ, quarto primæ vices gerente termini alicuius ſecundæ: duas ea importat quæſtiones, duas incognitas, ſed per huiuſmodi regulam cognitio: ſecundæ quæritur ſolum, ut parcatur labori pro inveſtigatione primæ, ut ſi ſit* a : b = c : x, *&* d : x = e : z, *quæraturque* z. *Regula ſocietatis ex datis antecedentibus, & ſumma conſequentium quærit conſequentia ipſa: at huiuſmodi regularum formulas habes* cor.: 3. th: 26. *&* 4. th. 31.

Proponi etiam ſolet regula alligationis, regula falſi &c. ſed qui probe callebùnt hujus capitis Theoriam calculum literalem, & problemata omnia, quæ per huiuſmodi regulas ſoluuntur, & expedite magis ſolvent, & eo ipſo regulas adinvenient. Cæterum, ne de me ullus conquæratur, ubi calculi literalis ad ſolvenda problemata applicationem perſequar, cæteras regulas ad inſtar exemplorum proponam, & demonſtrabo.

Ad dignoſcendum, quandonam regula trium, *vel* quinque *directa, vel inverſa ſit, uſus. & naturale ratiocinium confert magis, quam præcepta. Veruntamen quoniam præter hunc, alios etiam habent in Matheſi uſus, ſequentia adiicio.*

I. *Si creſcente* a *uniformiter creſcit* b, *erit* a *ad ſuum incrementum, uti* b *ad incrementum reſpondens incremento ipſius* a. *Sit enim ipſius* a *incrementum* na; *Quoniam eadem lege creſcit* b (hyp) *incrementum ipſius* b *erit* nb, *nimirum evadente* a *dupla, tripla,* n *pla, etiam dupla, tripla*

pla, n *pla evadet* b; *eſt vero* a : n a = b : n b (def. 30.) *ergo &c.*

2. *Si creſcente* a *deſcreſcit* b, *erit* a *ad ſuum incrementum, uti decrementum* b, *ad ipſam* b. *Eadem enim ratione oſtendetur incremento* na *ipſius* a *reſpondere decrementum* $\frac{1}{n}$ b *ipſius* b, *cum ergo ſit* a : na = $\frac{1}{n}$ b : b (*def.* 30.) *liquet propoſitum*.

3. *Si creſcentibus* b, *&* c *creſcit* a, *ſed alterutra* b *creſcente, altera* c *eadem maneat, vel contra*, a : n a = b : n b, *vel* a : m a = c : m c. *Cum enim* (n. 1,) *ſit* a : n a = b : nb, *&* a : ma = c : mc, *erit* (*th.* 31.] aa : nama = bc : nbmc. *Jam in primo caſu ſecunda proportio evadit in* a : a = c : c (hyp.] *ſeu in* 1 : 1 = 1 : 1 [*cor.* 5. *def.* 30.) *& in* 1 : 1 = 1 : 1 *evadit prima in caſu altero ob eandem rationem, & tota illa compoſita evadit in* a : na = b : nb *in primo caſu, in ſecundo evadit in* a ; ma = c : mc (*cor. cit.*) *ergo &c. Eodem modo ſi* a *creſcat creſcente* b, *& deſcreſcente* c, *ſed creſcente* b *eadem maneat* c, *vel decreſcente* c *eadem maneat* b, *evincam eſſe* a : na = b : nb *in primo caſu, & in altero caſu eſſe* a : m a = $\frac{1}{m}$ c : c

4 *Quantitates ſunt in ratione compoſita ex directis earum, quibus creſcentibus ipſæ uniformiter creſcunt. Sint* b, & c, *quibus creſcentibus in* B, *&* C, a *creſcat in* A. *Ponamus* a *creſcere in* x, *dum* b *creſcit*

Digitized by Google

ſcit in B *eadem interim manente* c, *erit* a : x = b : B (n. 3) *&* x : A = c : C [n. 3.) *&* [th. 31.) a x : Ax = bc : BC, *ſeu* (cor. 6. def. 30.) a : A = bc : BC. *creſcat* a *in* A *creſcentibus* b, c, d, *in* B, C, D. *Ponamus* a *creſcere in* x *creſcentibus* b, c, *in* B, C *eadem interim manente* d, *erit* a : x = bc : BC (ex dem.) *&* (n. 3] x : A = d : D : *unde iterum* (th. 31.] a x : A x = b c d : BCD *&* (cor. 6. def. 30.) a : A = b c d : BCD, *idem oſtenditur in omni alio caſu, in quo plures adhuc fuerint, quibus creſcentibus* a *uniformiter creſcat, imo eadem penitus ratione evincitur, ſi ipſarum* b, c, d, *&c aliquæ creſcant uniformiter, aliquæ decreſcant, fore* a : A *in ratione compoſita ex directis creſcentium, & inverſis decreſcentium. Ex mercibus, & pretiis, ex itinieribus, velocitatitatibus, & temporibus facillime peti poſſunt exempla, quibus ſi applicetur brevis, & nova hac theoria, ipſa evadet planior, & eo ipſo palpabitur, quam bene conferat in uſu regulæ* trium, *vel quinque ad diſpoſitionem terminorum, per quam regula ipſa evadit directa, vel inverſa. Velim, attendatur ad vocem* uniformiter; *ſic enim evaneſcent difficultates, quæ contra noſtram hanc theoriam ſuboriri poſſunt.*

ARTICULUS IV.

De Progreſſionibus Geometricis.

Def. 34. SEries numerorum continue proportionalium dicitur progreſſio *geometrica.*

trica. Si numeri progreſſionem componentes fuerint a, b, c, d, ea ſcribatur $a : b = b : c = c : d = d : e = e : f$ &c. a pleriſque ſcribi ſolet $\div\!\!: a, b, c, d, e, f$ &c. ſed hoc ſigno nos non utemur.

Cor. I. Unitas, numerus quilibet, & ejus potentiæ ordinatim aſcendentes conſtituunt progreſſionem geometricam (*cor def.* 25. *&* *cor.* 1. *def.* 33.). & invertendo potentia quælibet ſuperior cum ſuius inferioribus, & unitate progreſſionem geometricam efficiunt. Sic $1 : a = a : a2 = a2 : a3 = a3 : a4 = a4 : a5$ &c. & $a5 : a4 = a : a3 = a3 : a2 = a2 : a = a : 1$.

Cor. 2. Sit terminus primus 1, exponens n pro ratione multiplicitatis, & $\frac{1}{n}$ pro ratione ſubmultiplicitatis. Quod ſi ſucceſſivi termini, quærantur juxta regulam in (*cor.* 7. *def*, 29.) traditam, in primo caſu progreſſio erit 1, $\frac{1}{n}, \frac{1}{n2}, \frac{1}{n3}, \frac{1}{n4}, \frac{1}{n5}$ &c. & in ſecundo erit $1, n, n2, n3, n4, n5$ &c. h, e. ſi ratio, juxta quam progrediuntur numeri in progreſſione ab 1 incipiente, ſit multiplex; ipſi ſunt potentiæ fractionis, cujus numerator eſt 1. denominator vero exponens rationis n; ſi ſubmultiplex, termini progreſſionis ſunt potentiæ ipſius exponentis. Quoniam ſi ponatur $m = \frac{1}{n}$, eſt $m2 = \frac{1}{n2}$, $m3 = \frac{1}{n3}$ &c. poſthac utemur denominatore m per

fra-

fractionem $\frac{1}{n}$, vel per integrum n explicabili, atque ita una eademque ſeries $1, m, m2, m3, m4$, &c. exponet $1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n2}$, &c. vel $1, n, n2$ &c. Quodſi primus terminus ſit aliqua exponentis dignitas, *v. g.* $n5$ eadem regula invenietur 2.dus $n4$, 3.us $n3$, 4.us $n2$, 5us n, 6us $\frac{1}{n}$, 7.us $\frac{1}{n2}$ &c.

Sch. N*Ota numerum terminorum unitate excedere exponentem dignitatum ſupradictarum. Sic in termino quinto* n.4 *exponens eſt* $4 = 5 - 1$. *Si vero terminus primus ſit ipſe exponens rationis, tum numerus terminorum coincidit cum exponente dignitatis ipſius* n. *Sic exponens termini* n5 *eſt* 5, *idem cum numero terminorum.*

Cor. 3. SI terminus primus ſit a, denominator m, erit progreſſio a, ma, $m2a$, $m3a$, $m4a$ &c. (*cor.* 2.)

Cor. 4. DAto primo, & ſecundo progreſſionis geometricæ termino, datur etiam exponens (*cor.* 4.*def.*29.] adeoque (*cor.* 2. & 3.) progreſſio ipſa continuari poteſt. *v.g.* ſi primus ſit a, ſecundus b, erit exponens $\frac{a}{b}$, & progreſſio $a, b, \frac{b2}{a}, \frac{b3}{a2}, \frac{b4}{a3}$ &c. (*cor.* 3..)

Cor. 5. DAto primo termino a, ultimo u, & numero terminorum n, exponens x facile etiam determinatur; eſt enim $u = a$

trica. Si numeri progreſſionem componentes fuerint a, b, c, d, ea ſcribatur $a : b = b : c = c : d = d : e = e : f$ &c. a pleriſque ſcribi ſolet $\div\!: a, b, c, d, e, f$ &c. ſed hoc ſigno nos non utemur.

Cor. 1. UNitas, numerus quilibet, & ejus potentiæ ordinatim aſcendentes conſtituunt progreſſionem geometricam (*cor def.* 25. & *cor.* 1. *def.* 33.). & invertendo potentia quælibet ſuperior cum ſuius inferioribus, & unitate progreſſionem geometricam efficiunt. Sic $1 : a = a : a2 = a2 : a3 = a3 : a4 = a4 : a5$ &c. & $a5 : a4 = a : a3 = a3 : a2 = a2 : a = a : 1$.

Cor. 2. SIt terminus primus 1, exponens n pro ratione multiplicitatis, & $\frac{1}{n}$ pro ratione ſubmultiplicitatis. Quod ſi ſucceſſivi termini, quærantur juxta regulam in (*cor.* 7. *def*, 29.) traditam, in primo caſu progreſſio erit 1, $\frac{1}{n}, \frac{1}{n2}, \frac{1}{n3}, \frac{1}{n4}, \frac{1}{n5}$ &c. & in ſecundo erit $1, n, n2, n3, n4, n5$ &c. h, e. ſi ratio, juxta quam progrediuntur numeri in progreſſione ab 1 incipiente, ſit multiplex; ipſi ſunt potentiæ fractionis, cujus numerator eſt 1. denominator vero exponens rationis n; ſi ſubmultiplex, termini progreſſionis ſunt potentiæ ipſius exponentis. Quoniam ſi ponatur $m = \frac{1}{n}$, eſt $m2 = \frac{1}{n2}$, $m3 = \frac{1}{n3}$ &c. poſthac utemur denominatore m per

fra-

fractionem $\frac{1}{n}$, vel per integrum n explicabili, atque ita una eademque ſeries 1, m, $m2$, $m3$, $m4$, &c. exponet 1, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n2}$, &c. vel 1, n, $n2$ &c. Quodſi primus terminus ſit aliqua exponentis dignitas, *v. g.* $n5$ eadem regula invenietur 2.dus $n4$, 3.us $n3$, 4.us $n2$, 5us n, 6us $\frac{1}{n}$, 7.us $\frac{1}{n2}$ &c.

Sch. *Nota numerum terminorum unitate excedere exponentem dignitatum ſupradictarum. Sic in termino quinto* n.4 *exponens eſt* 4 = 5 − 1. *Si vero terminus primus ſit ipſe exponens rationis, tum numerus terminorum coincidit cum exponente dignitatis ipſius* n. *Sic exponens termini* n5 *eſt* 5, *idem cum numero terminorum.*

Cor. 3. Si terminus primus ſit a, denominator m, erit progreſſio a, ma, $m2\,a$, $m3\,a$, $m4\,a$ &c. (*cor.* 2.)

Cor. 4. Dato primo, & ſecundo progreſſionis geometricæ termino, datur etiam exponens (*cor.* 4.*def.*29.] adeoque (*cor.* 2. *&* 3.) progreſſio ipſa continuari poteſt. *v.g.* ſi primus ſit a, ſecundus b, erit exponens $\frac{a}{b}$, & progreſſio a, b, $\frac{b2}{a}$, $\frac{b3}{a2}$, $\frac{b4}{a3}$ &c. (*cor.* 3..)

Cor. 5. Dato primo termino a, ultimo u, & numero terminorum n, exponens x facile etiam determinatur; eſt enim $u = a$

$a x^{n-1}$ (*ſch. præc.*) $\frac{u}{a} = x^{n-1}$ (*th.* 19.)

$x = \& \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Si progreſſio ab 1. incipiat,

$a = 1$, & $\frac{u}{a} = u$ [*cor.* 4. *def.* 25)

Cor. 6. SI detur 1.us & ultimus, ex cor. 5. ita determinatur numerus terminorum n. Nam $\frac{u}{a} = x^{n-1}$ (*cor. cit*) Ducatur ergo in ſe ipſum exponens datus x tandiu, donec fiat $= \frac{u}{a}$, & exponenti dignitatis, quæ prodit, addatur 1: & habebitur numerus terminorum.

Th. 33. *IN progreſſione geometrica factum extremorum æquale eſt facto mediorum ab extremis æquidiſtantium, &, ſi numerus terminorum ſit impar, quadrato medii.*

Dem. QUoniam rationes numerorum in progreſſione ſe ſequentium ſunt ſimiles [*def.* 34.] erit primus ad ſecundum in ſimplici, ad tertium in duplicata, ad quartum in triplicata ratione primi ad ſecundum, & ad ultimum primus ante ipſum in ſimplici, ſecundus in duplicata, tertius in triplicata &c. ratione penultimi ad ultimum, ſeu [*hyp.*) primi ad ſecundum. Quare primus ad ſecundum, ut penultimus ad ultimum, primus ad tertium, ut antepenultimus ad ultimum &c. (*cor.* 3. *def.* 32.) ſunt vero ſecundus, tertius, quartus &c. ita diſtantes a primo, ut ab ultimo diſtat penultimus, antepenultimus, tertius ante ultimum &c. adeoque primus

mus ad diſtantem ab ipſo, ut ad ultimum æquidiſtans ab ipſo. Ergo (*th.* 26.) factum extremorum æquatur facto mediorum ab ipſis æquidiſtantium.

Quod ſi numerus terminorum ſit impar, erit primus ad medium, ut medius ad ultimum ob eandem rationem; conſequenter factum extremorum æquabitur quadrato medii [*cor.* 1. *Th.* 26.)

Cor. Sit primus a, ultimus z, qui conſequuntur primum, ſint $a, b, c, d, e.$ qui antecedunt ultimum y, x, u, t, &c. erit $az = by = cx = du = et$, &c. unde $b : c = x : y$, $b : d = u : y$, $b : e = t : u$ &c. h. e. in progreſſione geometrica $a, b, c, d, e, t, u, x, y, z$, termini a ſe invicem æquidiſtantes ſunt proportionales.

Th. 34. *In progreſſione geometrica ſumma omnium excepto ultimo ad ſummam omnium excepto primo, uti primus ad ſecundum.*

Dem. Esto progreſſio $a : b = b : c = c : d = d : e = e : f$ &c. [*cor.* 5. *th.* 30.] $a + b + c + d + e : b + c + d + e + f = a : b$. q. e. d.

Cor. I. Si primus terminus ſit a, ultimus z, ſumma $ſ$, & ſecundus b, erit $a : b = ſ - z : ſ - a$ & (*th.* 26.) $ſa - aa = ſb - bz$, & $ſb - ſa = bz - aa$ (*th.* 13.) & (*th.* 19.) $\frac{bz - aa}{b - a} = ſ$. Pariter $\frac{ſa - aa}{ſ - z} = b$ [*th.* 19.] & $\frac{ſb - ſa + aa}{b} = z$, (*th.* 13. & 19.) $ſa - ſb = aa - bz$, & (*th.* 19.) $\frac{aa - bz}{a - b} = ſ$. Denique $\frac{aa + ſb - ſa}{b} = z$. (*th.* 10. 13. & 19.)

Cor. 2. SI progreſſio in infinitum producatur, & ejus termini creſcant, erit primus ultimo infinite ſubmultiplex (*def.* 31.) ſeu ejus pars infinite parva, ſeu ejus reſpectu æquabitur o (*n.* 5. *Prol.*) & $aa = 0$ [*cor* 4.*def.* 24.] cum igitur ſumma progreſſionis creſcentis ſit $\frac{bz - aa}{b - a}$, erit eadem $= \frac{bz}{b - a}$, & (*cor.*6.*th.*26.) $b - a : b = z : ſ$; h. e. in prog. geom. infinita creſcente differentia primi, & ſecundi eſt ad ſecundum, uti ultimus ad ſummam. Quodſi progreſſio decreſcat, erit ultimus reſpectu primi particula infinite parva, ſeu $z = 0$, & [*cor.*4. *def.* 24.] $bz = 0$. Eſt itaque ob $ſ = \frac{aa - bz}{a - b}$, (*cor.* 1.) in progreſſione decreſcente $ſ = \frac{a}{a - b}$, & (*cor.*6.*th.*26.) $a - b : a = a : ſ$; h. e. in progreſſione geometrica infinita decreſcente inter differentiam primi, & ſecundi, ac ſummam primus eſt medius proportionalis.

Cor. 3. SI $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, ſumma $ſ$ ſeriei infinitæ, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c. in inf. erit $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. (*cor.*3.*prob.*19.) Si $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, ſumma ſeriei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c. in infini-

Digitized by Google

tum erit $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$ (*cor.* 5. *th.* 20.)

Eadem ratione invenitur ſummam ſerei $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, &c. infinitum eſſe $\frac{1}{2}$. Atque ita ſummantur ſeries infinitæ, imo etiam inter ſe comparantur. Sic prima eſt ad ſecundam uti $2 : 1$, ad tertiam, uti $2 : \frac{1}{2}$

Th. 35. *IN progr. geom. ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita differentia termini primi, & ultimi ad ſummam dempto ultimo.*

Dem. POſito den. m, & reliquis, ut in Th. præc. erit $b = ma$ [*cor.* 2. *def.* 34.) & $a : ma = 1 : m$ [*cor.* 6. *def.* 30.) & [*th.* 34. & *cor.* 8. *def.* 30.) $1 : m - ſ - z : ſ - a$, & [*th.* 30.) $m - 1 : 1 = ſ - a - ſ + z$ [$z - a$ *prob.* 6.] : $ſ - z$.

Cor. 1. ESt ergo $\frac{z - a}{m - 1} = ſ - z$ (*cor.* 3 *th.* 26.) & (*th.* 10.) $\frac{z - a}{m - 1} + z = ſ$.

Cor. 2. $m - 1 : 1 = ma - a : a$ (*cor.* 6. *def.* 30.) ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $ma - a : a = z - a : ſ - z$; h. e. exceſſus 2.di ma ſupra primum a ad primum, ut exceſſus ultimi ſupra primum ad ſummam omnium dempto ultimo.

Digitized by Google

Cor. 3. Ex analogia $m - 1 : 1 = z - a : ſ - z$, eruitur etiam $\frac{z - a}{ſ - z} = m - 1$ (*cor.* 3. *th.* 26.) & (*th.* 10.) $\frac{z - a}{ſ - z} + 1 = m$, ex qua formula eruitur regula inveniendi denominatorem progreſſionis ex datis primo, ultimo, & ſumma.

ARTICULUS V.

De Proportione Harmonica, & Contraharmonica.

Def. 35. Quatuor quantitates dicuntur *harmonice* proportionales, ſi differentia primæ a ſecunda ſit ad differentiam tertiæ a quarta, uti prima ad quartam. Si ſecunda bis repetitur, hujuſmodi proportio eſt *continua*, & ſeries harmonice continue proportionalium eſt harmonica *progreſſio*.

Cor. I. Eſt igitur (*def.* 23.) in proportione harmonica $a - b : c - d = a : d$, & (*th.* 26.) $ad - bd = ac - ad$; unde (*th.* 10.) $2ad - bd = ac$, & (*th.* 19.) $\frac{ac}{2a - b} = d$, & $\frac{2ad - bd}{a} = c$; militer $2ad - ac = bd$ (*th.* 13.) & $\frac{2ad - bd}{d} = b$ (*th.* 19.) Datis itaque tribus terminis proportionis harmonicæ ſemper inveniri poteſt quartus.

Digitized by Google

Cor. 2. IN proportione harmonica continua eſt (*def*: 35.] $a - b : b - c = a : c$, & (*th*. 26.) $ac - bc = ab - ac$. Unde (*th*: 10.) $2ac - bc = ab$, & (*th*: 19.) $\frac{ab}{2a - b} = c$. Porro $2ac = ab + bc$ (*th*: 10.) $\frac{2ac}{a + c} = b$ (*th*:19,) deniq: $2ac - ab = bc$ [*th*:13) & $\frac{bc}{2c - b} = a$ (*th*. 19.)

Sch. I. *QUoniam datis duobus invenitur tertius continue harmonice proportionalis* [cor. 2.) *ſi ſecundus datorum ponatur pro primo, & tertius inventus pro ſecundo, eadem methodo invenitur quartus, & ita procedendo progreſſio harmonica producetur.*

Sch. 2. S*I* b = 2 a, *erit* 2 a − b = 0 (*cor*. 4.*def*. 23.)*adeoq*; $c = \frac{ab}{0}$ [cor.2.) *quæ quantitas eſt infinita*. [*cor* .7.*def* 25.] *Si igitur datorum primus eſt ſubduplus ſecundi, tertius continue harmonice proportionalis inveniri nequit. Multo minus ſi* 2 a $<$ b, *tum enim a fortiori prodibit* c *æqualis infinito.*

Def. 36 SI differentia, primi, & ſecundi ad differentiam tertii, & quarti, ut quartus ad primum, proportio eſt *contraharmonica, diſcreta*, vel *continua* in ſenſu definitionis antecedentis.

Cor. ESt ergo $a - b : c - d = d : a$, unde $aa - ab = cd - dd$, & in continua $a - b : b - c = c : a$, unde $aa - ab = bc - cc$ (*th*: 26.) $aa + cc = bc + ab$ (*th*. 10.) & $\frac{aa + cc}{c + a} = b$ (*th*. 19.)

ſch.

Sch. *Ubi regulas analyſeos callebitis, ex duabus primis formulis ſingulos terminos per eas facile elicietis.*

ARTICULUS VI.

De Logarithmis.

Def. 37. Si progreſſioni geometricæ 1, *n*, *n*2, *n*3, *n*4, *n*5, &c. ſubſcribatur arithmetica 0, *d*, 2*d*, 3*d*, 4*d*, 5*d*, &c. terminus quilibet hujus *v. g.* 3 *d* reſpectu homologi *n*3. dicitur *logarithmus*.

Cor. I. Si loco *d* ponatur 1, ſeries arithmetica evadit in 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. qui termini coincidunt cum exponentibus terminorum ſeriei geometricæ, *v. g.* 2 *d* reſpondet *n*2, 3 *d* ipſi *n*3 &c. eſt vero 2 : 1 = 2*d* : 1*d* (*cor.* 6. *def.* 30.) ſunt igitur ſemper log-mi terminorum ſeriei geom. ab 1 incipientis exponentibus ipſorum proportionales.

Th. 36. *Si log-mus 1 eſt 0, log-mus facti eſt ſumma ex log-mis factorum, & log-mus quoti eſt differentia log-mi dividendi a log-mo diviſoris.*

Dem. Quoniam 1 : *a* = *b* : *a b* (*cor.* 5. *th.* 26.) 1, *a*, *b*, *a b* ſunt quatuor termini progr. geom. aut continui, aut bini bini æquidiſtantes (*cor. th.* 33.) Quare & eorum log-mi ſunt termini progr. arith. ab 0 (*hyp.*) incipientis, vel continui, vel ſimiliter diſcreti (*def.* 37.) adeoque & arithmetice proportionales

nales (*th.* 23) Quare $l1 + lab = la + lb$ (*cor.* 1. *th* 23) ſeu $o + lab = la + lb$ *q. e.* 1.

2. Si ab ſit dividendum, & a diviſor, erit b quotus (*th.* 17.) eſt vero $lab = la + lb$ (1. *p.*) & $lab - la = lb$ (*th.* 13.) ergo log-mus quoti eſt differentia &c. *q. e.* 2.

Cor. 1. Ex hoc th. eruitur regula multiplicandi, & dividendi dignitates agnatas. Cum enim exponentes earum ſint earum log-mi [*cor.* 1. *def.* 37.) earum multiplicatio fiet addendo exponentes (1. *p.*) & diviſio exponentes ſubtrahendo [2. *p.*) Sic $a^3 . a^4 = a^7$, $a^n . a^m = a^{n+m}$ & $a^5 : a^3 = a^2$, $a^n : a^m = a^{n-m}$ &c,

Cor. 2. In fractione numerator eſt dividendum, denominator diviſor, & fractio ipſa quotus (*th.* 20.) log-mus ergo fractionis prodit ſi a log-mo numeratoris ſubtrahatur log-mus denominatoris, qui cum in hyp. th. ſit $l1. = o$, erit $< o$ h. e. negatiuus (*n.* 5. *in Prob.*)

Cor. 3. $\frac{n}{n} = 1$. (*cor.* 3. *def.* 25.) eſt vero exponens ipſius $n = 1$. (*def.* 26.) adeoque exponens $\frac{n}{n} = 1 - 1$ [*cor.* 10.) $= o$ [*cor.* 4. *def.* 23.] Quare $\frac{n}{n} = 1 = n^0$. Simili modo $o - 1$ eſt exponens $\frac{n^0}{n}$, ſeu $\frac{1}{n}$, adeoque $n^{-1} = \frac{1}{n}$, & eadem ratione $n^{-2} = \frac{1}{n^2}$, $n^{-m} = \frac{1}{n^m}$

cor. 4

Cor. 4. LOg-mus quadrati eſt duplus, cubi triplus, potentiæ n, n plus log-mi radicis (1.*p.*☞ *cor.* 1.) ſeu hic eſt ad illum ut, $1:n$. Cum ergo ſit exponens radicis ad exponentem potentiæ, ut log-mus radicis ad log-mum potentiæ (*cor.* 2. *def.* 27,) h. e. ſi exponens radicis ſit e, exponens dignitatis E, log-mus radicis l; log-mus dignitatis L, erit $e : E = l : L$, & $eL = El$ (1. *p. th.* 26.) $\frac{El}{e} = L$, $\frac{El}{L} = e$, $\frac{eL}{l} = E$, $\frac{eL}{E} = l$ (*cor.* 3. *th.* 26.]

Cor. 5. CUm exponens radicis ſit ad exponentem potentiæ n, ut $1:n$ (*cor.* 4.) ſi a^m elevanda ſit ad potentiam n, erit a^m reſpectu ſuæ dignitatis n radix, conſequenter $1 : n = m : mn$. eſt ergo mn factum ex exponente dato in eum, quo afficiebatur data dignitas, exponens datæ dignitatis a^m ad potentiam n elevatæ; ſic quadratum a^4 eſt $a^{4.2} = a^8$, cubus a^2 eſt $a^{2.3} = a^6$ &c. ſimiliter ſi ex a^m eruenda ſit radix n, erit $n : 1 = m : \frac{m}{n}$ h. e. quotus ex exponente datæ potentiæ per exponentem radicis eruendæ eſt exponens dignitati, ex qua radix illa eruitur, relinquendus: ſic $\sqrt[2]{a^3} = a^{3:2}$, $\sqrt[3]{a^6} = a^{6:3} = a^2$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$ &c.

Sch. *USus log-morum maximus eſt etiam in numeris vulgaribus. Si enim, quod jam Byrgius, ulacq, aljique præſtitere, conſtruantur tabulæ, in quibus ordinatim exhibeantur numeri*

uulga-

uulgares, & e regione ipſorum locentur eorum log-mi, numerus A *per* B *multiplicabitur, aut dividetur, ſi ex tabulis excerpantur l* A, *l* B, *& in iiſdem quæratur, quinam numerus reſpondeat log-mo* $=$ *l* A $\mp$ *l* B. *Similiter elevatio ad potentias per multiplicationem, per diviſionem log-morum fiet extractio radicum. Qua ratione conſtruantur hujuſmodi tabulæ, priuſquam videamus, aliqua ſunt notanda. Si* 2.*dus progr. geom. ab* 1 *incipientis terminus ſit* 2, *ea non tranſit per omnes numeros, puta per* 3, 5, 6, 7, *&c. nec per omnes tranſit, ſi* 2*dus ſit* 3; *aut quivis alter, & in his proinde caſibus omnes numeri ſuum non habent log-mum. Eam ob rem ad arbitrium aſſumitur progr. geom.* 1, 10, 100, 1000, 10000 *&c. articulorum primariorum, qui ſtabilito log-mo* 1 $=$ 0, *& log mo* 10 $=$ 1, *eo ipſo ſuum omnes obtinent determinatum log-mum. Iam vero numerorum intermediorum accurati log-mi non habentur; ut ergo veris quammaxime proximi obtineantur, h. e. a veris ne* 1 *quidem* 10000000.*ma diſtantes log-mus* 10 *ſtatuitur* 1. 0000000, *& ipſi numeri in operando per hujuſmodi decimales exprimuntur.*

Prob. 24. *Numeri cuiſlibet, qui non ſit articulus primus, log-mum invenire.*

Reſol. Sit datus *n*, qui mediet inter articulos A, & B. Quæratur (*cor.*2.*th.*26.) inter A, & B media porportionalis *t*, & ſi *n* mediat inter *t*, & B, inter *t*, & B quæratur alia media *u*, ſi *n* mediat inter *u*, & B, iterum alia *x*, & ita porro, donec venias ad talem *z*, quæ mediet inter *n*, & B; tum inter antecedentem puta *x*, & *z* quæ-

z quæratur media y, adhuc alia inter z, & y &c. donec venias ad talem M, quæ ab n differat minus, quam 1. 10000000ma, id, quod obtinetur, ſi iuxta *ſch. præc.* A, B, n in 10000000mis exprimantur (*cor.2.prob.* 14.) 2.° Ex lA, & lB erue (*cor.* 2. *th. præc.*) *lt*, ex *lt*, & lB erue *lu* &c. ex *ly* & *lz*, lM, ſeu *ln.* 3.° ſi n mediat inter A, & t in operatione loco B utendum eſt A.

Dem. SI prog. ab 1 incipiens inſtituatur juxta denominatorem ultimæ rationis. ea tranſibit per omnes huiuſmodi medias proportionales (*Art. præc.*) adeoque etiam per illam, quæ ne 1 quidem 10000000ma differet ab n; ſed ei mediæ proportionali reſpondet log-mus in ſolutione inventus (*cor.* 4. *th. præc.*) ergo ille eſt logmus numeri ab n ne 1 quidem 10000000ma diſtantis, qualis (*ſch. præc.*) quæritur

Sch. T*Abulæ euulgares xibent tantum log-mos numerorum* ab 1 *ad* 100000.

Prob. 25. I*N venire log-mum numeri maioris ultimo tabulæ, ſed minoris* 10000000.

Reſol. REſecentur ex dato quatuor ſiniſtimæ notæ, & log-mus iis reſpondens in tabula excerpatur, cujus prima nota integra deſignans augeatur tot unitatibus, quot ſunt in dato nnmero notæ ad dexteram reſiduæ, ut ita habeatur [*ſch. th.* 36.) log-mus numeri compoſiti ex 4 illis notis, & tot 0, quot ſunt notæ in numero dato reliquæ poſt illas 4; qui ſit A; totidem unitatibus augeatur prima nota logmi in tabula aſſumptum proximæ ſequentis, ut ſic habeatur log-mus numeri B, in quem evaderet

ret datus x, ſi quarta ejus nota 1. augeretur; & erunt notæ dextimæ poſt illas 4, differeutia x ab A, numerus vero compoſitus ex 1, & tot o, quot ſunt illæ notæ dextimæ, differentia ipſius B ab A. Quodſi ergo incrementa log-morum ſtabiliantur [*quod parum a vero diſtat*) incrementis numerorum porportionalia, erit $x - A : B - A = lB - lA : lx - lA$, cujus proporportionis primi tres termini cum innoteſcant ex dem. invenietur etiam quartus (*cor.* 4. *th.* 26.) qui ſi ipſi lA adiiciatur, ob $lA + lx - lA = lx$ (*prob.* 6.) habebitur log-mus quæſitus.

Prob.26. *INvenire numerum reſpondentem log-mo maiori ultimo tabulæ, cujus tamen caracteriſtica non excedat* 4.

Reſol. E Log-mo dato ſubtrahatur log-mus 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, ut relinquatur log-mus ultimo tabulæ minor; quæraturque in tabula numerus reſpondens inventæ differentiæ; quodſi hic ducatur in numerum, cujus log-mus ſubtractus eſt, factum erit numerus quæſitus.

Dem. SIt log-mus datus lx, ſubtractus lA reſiduus lz, erit [2. *p.th.* 36.) $lx - lA = l\frac{x}{A}$; unde $l\frac{x}{A} = lz$, & $z = \frac{x}{A}$; ergo $Az = x$ [*th.* 18.) *q. e. d.*

Prob.27. *INvenire numerum reſpondentem log-mo inter duos tabulæ proximos medianti.*

Reſol. 1. SI datus differat a tabulari quoad primam notam, erit numerus reſ-

poni-

pondens tabulari additis, vel demptis tot ad dexteram o, quot 1 prima nota log-mi dati excedit, vel deficit a prima nota tabularis, æqualis log-mo dato. Si cyphræ delendæ in illo numero non adſint, dividitur per 1 cum totidem cyphris (*ſch*: *th*: 36.) 2. Quodſi datus differat a tabulari etiam quoad reliquas notas, a log-mo dato ſubtrahatur tabularis proxime minor, & hic ſubtrahatur etiam a proxime majori, fiatque ut differentia ſecunda ad primam, ita 1 (differentia numerorum A, & B reſpondentium log-mis, inter quos mediat datus lx) ad differentiam ipſius A ab x (*cor*.4. *th*.26.] inveniendam, qua ipſi A addita habebitur x (*ex ſup. dem.*) eſt enim ex dem. in Probl. $lB - lA : lx - lA = B - A : x - A$.

Prob. 27. *Invenire fractionem log-mo defectivo reſpondentem*,

Reſol. Sumatur denom. 100, vel 1000 &c. & ex ejus log-mo auferatur datus quæraturque in tabula numerus reſpondens log-mo reſiduo, hic erit numerator fractionis quæſitæ.

Dem. Sit den. aſſumptus A. ejuſque log-mus defectivus $l\ x$, erit numerus reſpondens $lA - lx = \frac{A}{x}$, & reſpondens $-l\ x = \frac{1}{x}$, fractionis itaque inventæ num. eſt $\frac{A}{x}$, & den. eſt A, ſeu ipſa fractio eſt $\frac{A}{x} : A = \frac{A}{Ax} = \frac{1}{x}$ (*cor*: 3. *prob.* 19. & 2 *th*. 20.]

FINIS.